Análisis de Funciones Especiales

Ing. Carlos Fernando Méndez Martínez

Análisis de funciones Especiales

ISBN: 978-9942-27-071-9

Edición y Corrección
Lic. Marilin Balmaseda Mederos, Msc.

Diagramación y maquetación en LaTeX
Ing. Rodolfo Barbeito Rodríguez

Diseño de cubierta
DG. María Jesús Palomeque Rodas

Impresión: Editorial Universitaria Católica (Edúnica)

Dedicatoria

Quiero dedicar el presente trabajo en primer lugar a mi madre doña María Luisa Martínez por haberme dado la existencia, apoyo y amor incondicional toda la vida. A mi esposa Shirley Coellar, compañera y amiga, fuente inagotable de inspiración y aliento en las horas difíciles. A mis adorados hijos Carlos Andrés y Jorge Sebastián motivo y razón de mi existencia, mil gracias por su infinito amor.

Ing. Carlos Fernando Méndez Martínez

Índice general

Prólogo

Construir ciencia siempre será una tarea apasionante y retadora, donde cada nueva idea merece reconocimiento colectivo, ya que su razón de ser está ligada a buscar el bienestar del hombre, a la vez que constituye un desafío al conocimiento existente. Al lente de cualquier paradigma la ciencia es dinámica, busca recambios y continuamente se somete al juicio de los edificadores del conocimiento.

El *Manual para el análisis de Funciones Especiales* propone algo ambicioso, explicar la funcionalidad de las funciones matemáticas especiales, es decir, lograr describir en palabras simples y concretas para qué sirven estas funciones. La primera interrogante que surge es ¿a qué se considera una función especial matemática?, la respuesta es aparentemente simple: las funciones especiales son aquellas que modelan una realidad para en formato simbólico replicar esa realidad.

El origen y fundamento de este tipo de obras se explica en el génesis mismo de las ciencias exactas o a la vez, en esa condición de herramienta útil para entender el entorno que las ciencias deben cumplir. Este aspecto evidencia la importancia de este trabajo, pues amalgama conocimientos, aptitudes y pertinencia en una investigación bien lograda donde el objetivo supera lo metodológicamente propuesto y alcanza espacios mayores que tienen que ver con el bienestar del estudiante y el docente. Además de poner al servicio de la sociedad educativa una herramienta de mejora.

Enseñar ciencias exactas es un reto continuo, significa rebasar lo formal y positivista de estas ciencias para abordar escenarios cualitativos de orden social, donde más que el resultado concreto de la operación debe importar el bienestar de los involucrados. Enseñar es un proceso de construcción social donde su efectividad debe considerarse en función del avance actitudinal de los individuos inmersos en el proceso.

Piaget indicó con gran acierto que enseñar matemáticas es especial, por cuanto los elementos de esta ciencia son conceptuales y no concretos, el número, el punto, el conjunto o el plano no existen en la realidad, son productos de la creatividad del hombre que ayudan a construir modelos de la realidad para poder estudiarlos. El profesor debe darse el trabajo de presentarlos como objetos concretos para iniciar un proceso efectivo de enseñanza.

Una función es una relación entre dos conjuntos, que debe cumplir ciertas condiciones, y están presentes en nuestras vidas. Obtener una cédula de identidad es un ejemplo concreto donde a cada ciudadano en base de un proceso, el registro civil asigna un código único. La ciencia matemática se encargará de moldear esto y la enseñanza de la matemática explicará pedagógicamente ese proceso.

Las funciones están presentes en nuestras vidas de manera reiterada y amplia. Muchas veces son tan comunes que no reflexionamos sobre su naturaleza y simplemente las aceptamos como parte de nuestro diario vivir, y así la ciencia se torna lejana, abstracta y sin sentido, mucho más cuando textos pensados y producidos en realidades distintas son impuestos y se obliga a memorizar procesos y métodos que claro justifican un resultado, más no ayudan a que el estudiante ecuatoriano construya los conocimientos de acuerdo a su realidad y su cultura.

Carlos Méndez Martínez hace una propuesta que irrespeta esta forma de acción y la plasma en una obra que siendo de contenido formal y cuantitativo, se sujeta a los parámetros sociales de pensar en el lector, en ese estudiante que buscará en sus hojas respuestas a sus interrogantes, y en tal sentido propone respuestas entendibles, que se sujetan al entorno y a la realidad de la educación de bachillerato y de educación superior del Ecuador.

Además, el autor selecciona, escoge un tema muy interesante en matemáticas, las funciones especiales, un apartado representativo dentro de la abstracción, donde la creatividad de su idealización es de por sí un incentivo a la reflexión, y los resultados a más de responder a lo metodológico, deben brindar resultados desde la lógica matemática y el sentido común.

Para entender la pertinencia de esta obra es preciso recordar que la matemática como ciencia, recurre a procesos formales muy estrictos, más la utilidad de sus resultados tiene éxito cuando es simple y puede ser utilizado como herramienta. Muchas veces lo especial de esta ciencia y la curiosidad que genera en ciertas mentes, ha construido resultados teóricos cuya utilidad práctica ha sido posterior. Esto no sucede con las funciones especiales, estas se han construido y se construyen para responder a un requerimiento concreto, se construyen así las definiciones y los fundamentos que dan respuesta a esa realidad y se construye la teoría que sustente adecuadamente los resultados.

Las funciones especiales constituyen entonces un espacio para abordar nuevas relaciones entre conjuntos, reconociendo que esas nuevas formas responden al desarrollo social y siempre existirá el espacio para su vigencia.

El abordaje práctico de los conceptos de elemento y de conjunto que se hace en esta obra, superando esa ambigüedad creada por Cantor[1] y que aún genera discusión entre los matemáticos, es particularmente interesante, pues lo hace desde un enfoque absolutamente concreto para desde allí explicar relaciones que responden absolutamente a lo concreto y no se sujetan a limitaciones teóricas.

La densidad de los números reales siempre provocará interrogantes. Si el punto tiene medida cero, ¿por qué la colección de puntos adjuntos tiene un medida positiva?, cuya discusión debe abordarse en trabajos de matemáticas puras y no en trabajos de enseñanza de las matemáticas, aquí más bien debe presentarse estos aspectos como especificidades de la ciencia que inciten la curiosidad.

Al leer la obra de Méndez Martínez, el estudiante encontrará respuestas a sus inquietudes, el profesor de matemáticas dispondrá del apoyo de una metodología y un lenguaje apropiado para su desempeño y el investigador tendrá acceso a una propuesta que establece una ruta y propone un camino a seguir.

Esta obra también viene a mitigar esa falencia en investigación educativa que caracteriza nuestra realidad nacional, donde el docente es capaz e innovador, mas se limita cuando se trata de investigar y sistematizar quizá por falta de costumbre. El rol del educador de la era digital debe caracterizarse por hacer de su desempeño un espacio de investigación y de su aula un laboratorio, donde los éxitos individuales y singulares han de servir para mejorar el sistema educativo.

Es menester recalcar que en el *Manual para el uso análisis de Funciones Especiales* se proponen explícitamente a las tecnologías de la información y la comunicación como herramientas que apoyan el desempeño del docente, superando esa idea equivocada de que estas tecnologías son el fin del proceso de enseñanza y que de cierta manera pueden llegar a sustituir al docente. Las tecnologías, todas ellas, incluyendo aquellas que surgen de los saberes ancestrales, son herramientas que apoyan el proceso de enseñanza aprendizaje, es el docente quien en función de su compromiso y su afán de mejorar su función quien ha de escoger la que mejor se acople a cada realidad, y así apoyar la construcción de conocimiento que ha de realizarse en comunidad con otros docentes y con los estudiantes.

[1] Cantor: (1845-1918). Matematico alemán de origen ruso. Se le considera el padre de la teoría de conjuntos. N. del E.

Seguro en un futuro este autor nos presentará nuevos aportes igual de innovadores y retadores, mas este aporte tiene un sabor especial porque surge en una época de cambio donde se plantea que el ser humano con sus emociones ha de ser el objetivo final del proceso de enseñanza, donde la creatividad del investigador debe superar el positivismo y construir resultados que engrandezcan a la sociedad, *Manual para el análisis de Funciones Especiales* cumple a cabalidad con estos principios.

Por último, deseo presentar mis felicitaciones a Carlos Fernando Méndez Martínez, su trabajo merecidamente constituye ya un elemento valioso en el desarrollo de la investigación educativa del país. Para mí ha sido un honor leerlo de fuente primaria, en ese proceso, he sentido nuevamente esa emoción que hace algunos años me embargó al reconocer que la enseñanza de las matemáticas posibilita entender la razón de ser de la madre de las ciencias y reconocer que el número tiene sentido social y es herramienta para lograr el bienestar social. Es necesario también que como persona agradezca al autor por haberme permitido ser parte de este proceso que me engrandece como ser humano y me permite reafirmar la valía del docente de nuestra geografía.

Mat. Vinicio Vásquez Bernal.

1 Intervalos

1.1. Definición

Etimológicamente, el término intervalo proviene de la raíz latina *intervallum* que significa espacio.

En matemáticas, una definición formal sería como sigue: un intervalo representa un subconjunto conexo de números reales "R_2", comprendidos entre dos números a los cuales llamaremos extremos, verificando una propiedad fundamental.

Denotando como "a" al extremo inferior y "b" al extremo superior de un intervalo de números reales, donde $a < b$; y, como "S" al subconjunto formado por todos los elementos comprendidos entre a y b, entonces:

Todo número real "n" tal que $a < n < b$ pertenece a "S".

En un sentido coloquial, el término intervalo significa "**entre valores**" Los intervalos se pueden representar de manera gráfica, mediante la utilización de porciones de rectas o semirrectas numéricas, donde el extremo inferior "a" siempre estará ubicado a la izquierda del extremo superior "b", puesto que $a < b$.

1.2. Clases de Intervalos

1.2.1. Intervalo Abierto

Sean "a" y "b" dos números reales, considerados los extremos inferior y superior de un intervalo respectivamente. Se define como intervalo abierto, al conjunto de números reales comprendidos entre "a" y "b", pero sin la inclusión de los valores extremos.

Su notación como intervalo es la siguiente:

$$(a, b)$$

Nótese la utilización de paréntesis, lo cual significa la no inclusión de los extremos.

Su notación conjuntista es:

$$\{x/\,(a < x < b)\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea mayor que el extremo inferior a, y menor que el extremo superior b, sin incluir los valores de a y b".

Su representación gráfica (gráfica 1.1) es:

Figura 1.1: Intervalo Abierto

1.2.2. Intervalo Cerrado

Sean "a" y "b" dos números reales, considerados los extremos inferior y superior de un intervalo respectivamente. Se define como intervalo cerrado, al conjunto de números reales comprendidos entre "a" y "b", pero con la inclusión de los valores extremos.

Su notación como intervalo es la siguiente:

$$[a, b]$$

Nótese la utilización de corchetes, lo cual significa la inclusión de los extremos.

Su notación conjuntista es:

$$\{x/\,[a \leq x \leq b]\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea mayor o igual que el extremo inferior a, y menor o igual que el extremo superior b, con inclusión de los valores de a y b".

Su representación gráfica (gráfica 1.2) es:

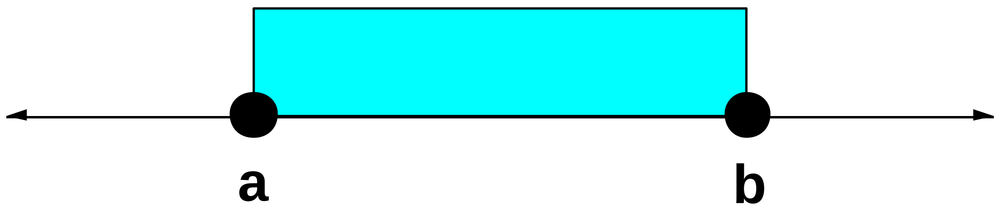


Figura 1.2: Intervalo Cerrado

1.2.3. Intervalo Semi-Abierto por la Derecha

Sean "a" y "b" dos números reales, considerados los extremos inferior y superior de un intervalo respectivamente. Se define como intervalo semi-abierto por la derecha, al conjunto de números reales comprendidos entre "a" y "b", con inclusión del extremo inferior "a" y exclusión del extremo superior "b".

Su notación como intervalo es la siguiente:

$$[a, b)$$

Nótese la utilización de corchete en el extremo inferior y paréntesis en el superior, lo cual implica la inclusión de "a" y exclusión de"b".

Su notación conjuntista es:

$$\{x/\,[a \leq x < b)\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea mayor o igual que el extremo inferior a, y menor que el extremo superior b, con inclusión del valor a y exclusión de b".

Su representación gráfica (gráfica 1.3) es:

Figura 1.3: Intervalo Semi-Abierto por la Derecha

1.2.4. Intervalo Semi-Abierto por la Izquierda

Sean "a" y "b" dos números reales, considerados los extremos inferior y superior de un intervalo respectivamente. Se define como intervalo semi-abierto por la izquierda, al conjunto de números reales comprendidos entre "a" y "b", con exclusión del extremo inferior "a" e inclusión del extremo superior "b".

Su notación como intervalo es la siguiente:

$$(a, b]$$

Nótese la utilización del paréntesis en el extremo inferior y corchete en el superior, lo cual implica la exclusión de "a" e inclusión de"b".

Su notación conjuntista es:

$$\{x/\,(a < x \leq b]\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea mayor que el extremo inferior a, y menor o igual que el extremo superior b, con exclusión del valor a e inclusión de b".

Su representación gráfica (gráfica 1.4) es:

.

Figura 1.4: Intervalo Semi-Abierto por la Izquierda

1.2.5. Intervalo Infinito Abierto a Izquierda

Sea "a" un número real, considerado el extremo inferior de un intervalo. Se define como intervalo infinito abierto a izquierda, al conjunto de números reales considerados desde el extremo inferior "a", con exclusión del mismo, y generado hacia el infinito positivo.

Su notación como intervalo es la siguiente:

$$(a, +\infty)$$

Nótese la utilización del paréntesis en el extremo inferior "a" que implica exclusión, y junto al símbolo $+\infty$ que no representa un número real.

Su notación conjuntista es:

$$\{x/(a < x < +\infty)\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea mayor que el extremo inferior a, y menor que $+\infty$". Representado como un rango de valores se tiene:

$$\{x/x > a\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea mayor que a".

Su representación gráfica (gráfica 1.5) es:

.

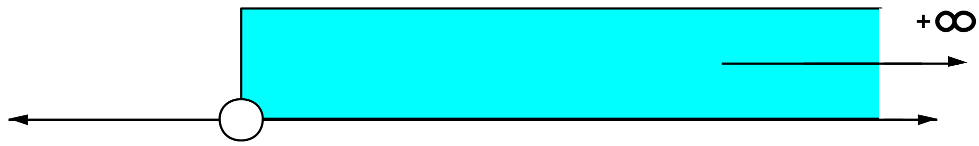


Figura 1.5: Intervalo Infinito Abierto a Izquierda

1.2.6. Intervalo Infinito Cerrado a Izquierda

Sea "a" un número real, considerado el extremo inferior de un intervalo. Se define como intervalo infinito cerrado a izquierda, al conjunto de números reales considerados desde el extremo inferior "a", con inclusión del mismo, y generado hacia el infinito positivo.

Su notación como intervalo es la siguiente:

$$[a, +\infty)$$

Nótese la utilización del corchete en el extremo inferior "a" que implica inclusión, y paréntesis junto al símbolo $+\infty$ que no representa un número real.

Su notación conjuntista es:

$$\{x/[a \leq x < +\infty)\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea mayor o igual que el extremo inferior a, y menor que $+\infty$". Representado como un rango de valores se tiene:

$$\{x/x \geq a\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea mayor o igual que a".

Su representación gráfica (gráfica 1.6) es:

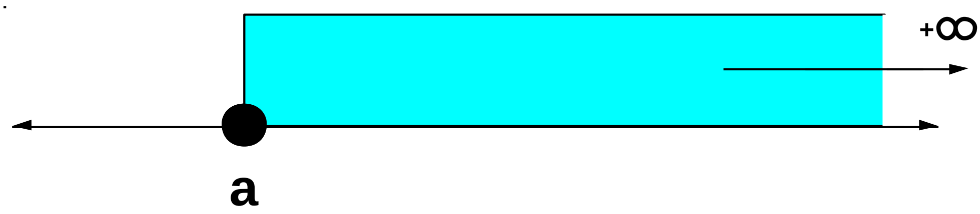


Figura 1.6: Intervalo Infinito Cerrado a Izquierda

1.2.7. Intervalo infinito Abierto a Derecha

Sea "a" un número real, considerado el extremo superior de un intervalo. Se define como intervalo infinito abierto a derecha, al conjunto de números reales considerados desde el extremo superior "a", con exclusión del mismo, y generado hacia el infinito negativo. Su notación como intervalo es la siguiente:

$$(-\infty, a)$$

Nótese la utilización del paréntesis en el extremo superior "a" que implica exclusión, y junto al símbolo $-\infty$ que no representa un número real.

Su notación conjuntista es:

$$\{x/\,(-\infty < x < a)\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea mayor que $-\infty$ y menor que el extremo superior a".

Representado como un rango de valores se tiene:

$$\{x/x < a\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea menor que a".

Su representación gráfica (gráfica 1.7) es:

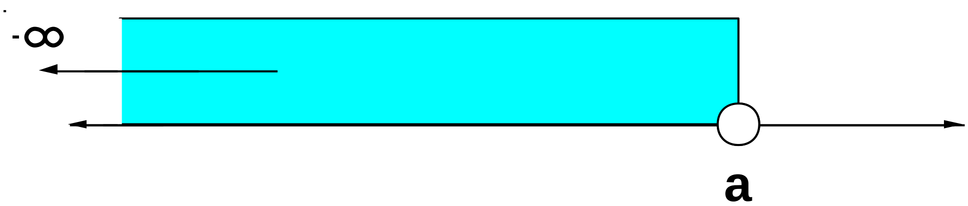


Figura 1.7: Intervalo Infinito Abierto a Derecha.

1.2.8. Intervalo infinito Cerrado a Derecha

Sea "a" un número real, considerado el extremo superior de un intervalo. Se define como intervalo infinito cerrado a derecha, al conjunto de números reales considerados desde el extremo superior "a", con inclusión del mismo, y generado hacia el infinito negativo.

Su notación como intervalo es la siguiente:

$$(-\infty, a]$$

Nótese la utilización del corchete en el extremo superior "a" que implica inclusión, y paréntesis junto al símbolo $-\infty$ que no representa un número real.

Su notación conjuntista es:

$$\{x/(-\infty < x \leq a]\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea menor o igual que el extremo superior a, y mayor que $-\infty$".

Representado como un rango de valores se tiene:

$$\{x/x \leq a\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea menor o igual que a".

Su representación gráfica (gráfica 1.8) es:

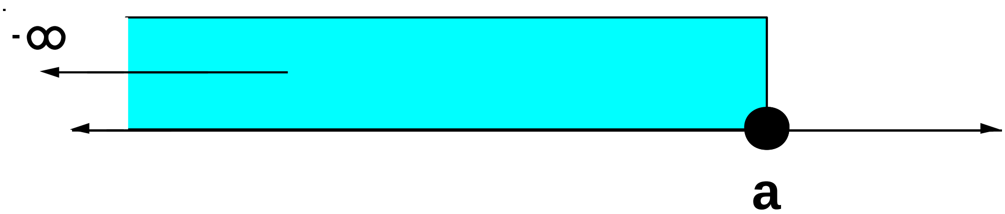


Figura 1.8: Intervalo Infinito Cerrado a Derecha.

1.2.9. Intervalo infinito

El intervalo infinito en suma, representa el conjunto de los números reales "R_2", en otras palabras la recta numérica.

Su notación como intervalo es la siguiente:

$$(-\infty, +\infty)$$

Nótese la utilización de paréntesis junto a los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ que no representan números reales.

Su notación conjuntista es:

$$\{x/\,(-\infty < x < +\infty)\}$$

Que se lee, "conjunto de valores de x, tal que x sea mayor que $-\infty$, y menor que $+\infty$".

Su representación gráfica (gráfica 1.9) es:

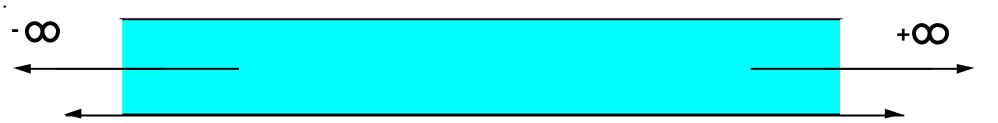


Figura 1.9: Intervalo Infinito.

2 Desigualdades

El hecho de establecer un cotejo o comparación entre dos entes matemáticos implica directamente la existencia real de dos posibles relaciones lógicas entre sí, la igualdad entre ellos, o en su defecto, que los mismos sean diferentes; de la última conclusión se desprende entonces que, si los entes sometidos a comparación son diferentes, es evidente que uno de ellos será necesariamente mayor que el otro. Esta verdad plantea entonces la existencia de establecer una relación entre dos expresiones matemáticas que no resultan iguales.

Bajo esta óptica, una desigualdad es una expresión matemática, la cual manifiesta uno o varios signos de desigualdad, como:

$>$ MAYOR QUE
$<$ MENOR QUE
$\leq$ MAYOR O IGUAL QUE
$\geq$ MENOR O IGUAL QUE
$\neq$ NO ES IGUAL QUE

2.1. Definición

Una desigualdad constituye una relación matemática de orden, que se establece entre dos miembros cuando los mismos son diferentes. Si en una desigualdad existe la presencia de al menos una variable tomará el nombre de inecuación.

2.2. Clasificación

Las desigualdades por su naturaleza se pueden agrupar como sigue:

2.2.1. Absolutas

Una desigualdad absoluta se define como aquella que resulta absolutamente independiente de las variables, por ejemplo:

$$20 > 10$$
$$-10 < -5$$
$$X - 15 < X$$

2.2.2. Condicionales o Inecuaciones

Una desigualdad condicional es aquella que, satisface sus condiciones únicamente y de manera exclusiva para determinados valores de sus variables, como por ejemplo:

$$5X - 3Y + 8 < 0$$
$$2X^2 + X - 5 > 0$$

2.3. Propiedades

a) Cuando a los miembros de una desigualdad, se les suma (algebraicamente) una misma cantidad, el sentido de la desigualdad no se altera.

Ejemplos:

$$8 > 2$$
$$8 + 5 > 2 + 5 \text{ , es decir:}$$
$$13 > 7, \text{ verifica.}$$

$$5 < 10$$
$$5 - 2 < 10 - 2 \text{ , es decir:}$$
$$3 < 8 \text{ , verifica.}$$

b) Cuando a los miembros de una desigualdad, se les multiplica por una constante positiva, el sentido de la desigualdad no se altera.

Ejemplos:

$$8 > 2$$
$$(8)(5) > (2)(5) \text{ , es decir:}$$
$$40 > 10, \text{ verifica.}$$

$$5 < 10$$
$$(5)(2) < (10)(2) \text{ , es decir:}$$
$$10 < 20 \text{ , verifica.}$$

Cuando a los miembros de una desigualdad, se les multiplica por una constante negativa, el sentido de la desigualdad se invierte.

Ejemplos:

$$8 > 2$$
$$(8)(-5) < (2)(-5) \text{ , inversión de sentido, es decir:}$$
$$-40 < -10, \text{ verifica.}$$

$$5 < 10$$
$$(5)(-2) > (10)(-2) \text{ , inversión de sentido, es decir:}$$
$$-10 > -20 \text{ , verifica.}$$

2.4. Solución de desigualdades por caso

2.4.1. Desigualdades Lineales

Su solución es simple y obedece a un conjunto de operaciones matemáticas básicas, así como a las propiedades fundamentales de las desigualdades, siempre considerando que al resolver una desigualdad, se busca un conjunto infinito de soluciones.

Ejemplos de cálculo:

En los siguientes ejercicios resolver las desigualdades.

$$16X - 8 < 4X + 4 \tag{2.1}$$

Solución.
Transponiendo términos:

$$16X - 4X < 8 + 4$$

Sumando términos semejantes:

$$12X < 12$$

De donde:

$$X < \frac{12}{12} \Longrightarrow X < 1$$

Su solución expresada como intervalo es la siguiente:

$$(-\infty, 1)$$

Su notación conjuntista es:

$$\{x/(-\infty < x < 1)\}$$

Representado como un rango de valores se tiene:

$$\{x/x < 1\}$$

Solución gráfica:

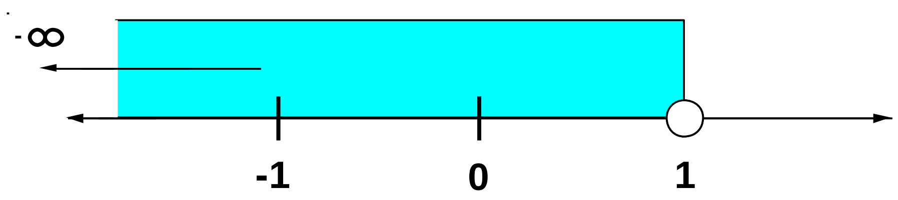


Figura 2.1

(2.2) $$7X - 4X + 3 - 16X \geq 2X + 6 - 5X - 8$$

Transponiendo términos:

$$7X - 4X - 16X - 2X + 5X \geq -3 + 6 - 8$$

Resolviendo.

$$12X - 22X \geq 6 - 11$$

$$-10X \geq -5$$

Multiplicando por (-1).

$$10X \leq 5$$

De donde:

$$X \leq \frac{5}{10} \Longrightarrow X \leq \frac{1}{2}$$

Su solución expresada como intervalo es la siguiente:

$$(-\infty, 1/2]$$

Su notación conjuntista es:

$$\{x/(-\infty < x \leq \frac{1}{2}]\}$$

Representado como un rango de valores se tiene:

$$\{x/x \leq \frac{1}{2}\}$$

Solución gráfica:

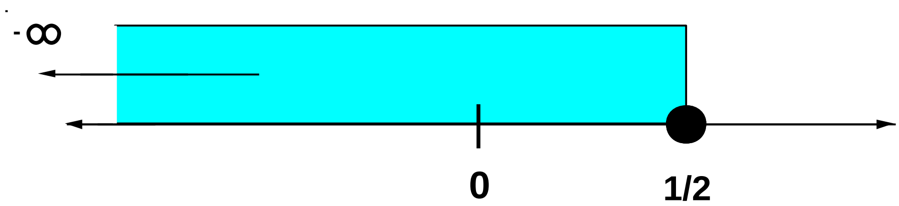


Figura 2.2

$$(2.3) \qquad 20X - 18 + 2X - 16X + 6 - 5X \geq -8X + 8 + 4X - 25$$

Solución.
Transponiendo términos:

$$20X + 2X - 16X - 5X + 8X - 4X \geq 18 - 6 + 8 - 25$$

Resolviendo.

$$30X - 25X \geq 26 - 31$$

$$5X \geq -5$$

De donde:

$$X \geq -\frac{5}{5} \Longrightarrow X \geq -1$$

Su solución expresada como intervalo es la siguiente:

$$[-1, +\infty)$$

Su notación conjuntista es:

$$\{x/[-1 \leq x < +\infty)\}$$

Representado como un rango de valores se tiene:

$$\{x/x \geq -1\}$$

Solución gráfica:

.

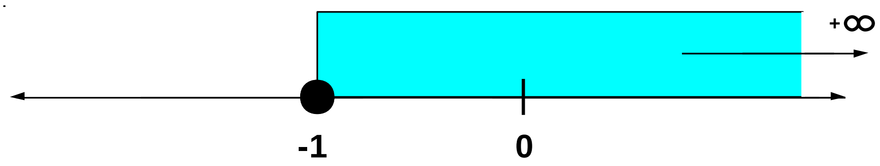


Figura 2.3

(2.4) $10(2X-2)+5-6(3X+4)-3X \leq 2(4X-1)+3X-10(7X+3)-123$

Solución.
Ejecutando operaciones indicadas:

$$20X - 20 + 5 - 18X - 24 - 3X \leq 8X - 2 + 3X - 70X - 30 - 123$$

Transponiendo términos:

$20X - 18X - 3X - 8X - 3X + 70X \leq 20 - 5 + 24 - 2 - 30 - 123$

Resolviendo.

$$90X - 32X \leq 44 - 160$$

$$58X \leq -116$$

De donde:

$$X \leq -\frac{116}{58} \Longrightarrow X \leq -2$$

Su solución expresada como intervalo es la siguiente:

$$(-\infty, -2]$$

Su notación conjuntista es:

$$\{x/(-\infty < x \leq -2]\}$$

Representado como un rango de valores se tiene:

$$\{x/x \leq -2\}$$

Solución gráfica:

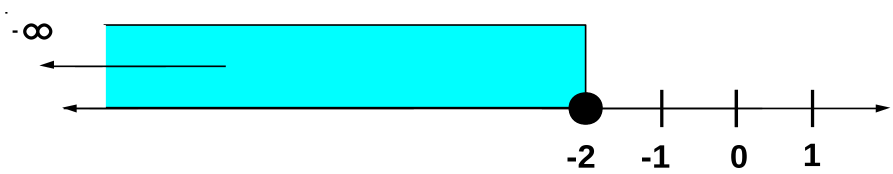


Figura 2.4

$$(2.5) \quad a - 6abX + 4b(2X + 8) + 10abX < 4(2X - a) + 2ab + 6a$$

Solución.
Ejecutando operaciones indicadas:

$$a - 6abX + 8bX + 32b + 10abX < 8X - 4a + 2ab + 6a$$

Transponiendo términos:

$$-6abX + 8bX + 10abX - 8X < -a - 32b - 4a + 2ab + 6a$$

Términos semejantes:

$$4abX + 8bX - 8X < a + 2ab - 32b$$

Factor común:

$$X(4ab + 8b - 8) < a + 2ab - 32b$$

De donde:

$$X < \frac{a + 2ab - 32b}{4ab + 8b - 8} \qquad Si: \qquad (4ab + 8b - 8) > 0$$

$$X > \frac{a + 2ab - 32b}{4ab + 8b - 8} \qquad Si: \qquad (4ab + 8b - 8) < 0$$

(2.6) $12ab+3(4X-6)-10(abX+2a) \geq 4a(5b+2bX)+5(a+X+3ab)$

Solución.
Ejecutando operaciones indicadas:

$$12ab + 12X - 18 - 10abX - 20a \geq 20ab + 8abX + 5a + 5X + 15ab$$

Transponiendo términos:

$$12X - 10abX - 8abX - 5X \geq -12ab + 18 + 20a + 20ab + 5a + 15ab$$

Términos semejantes:

$$7X - 18abX \geq 25a + 23ab + 18$$

Factor común:

$$X(7 - 18ab) \geq 25a + 23ab + 18$$

De donde:

$$X \geq \frac{25a + 23ab + 18}{7 - 18ab} \qquad Si: \qquad (7 - 18ab) > 0$$

$$X \leq \frac{25a + 23ab + 18}{7 - 18ab} \qquad Si: \qquad (7 - 18ab) < 0$$

(2.7) $$\frac{4}{3}X - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}X + \frac{2}{3}$$

Solución.
Transponiendo términos:

$$\frac{4}{3}X - \frac{3}{4}X \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

Mínimo común múltiplo de denominadores:

$$\frac{16X - 9X}{12} \leq \frac{3 + 4}{6}$$

Términos semejantes:

$$\frac{7X}{12} \leq \frac{7}{6}$$

De donde:

$$42X \leq 84$$

$$X \leq \frac{84}{42} \Longrightarrow X \leq 2$$

Su solución expresada como intervalo es la siguiente:

$$(-\infty, 2]$$

Su notación conjuntista es:

$$\{x/(-\infty < x \leq 2]\}$$

Representado como un rango de valores:

$$\{x/x \leq 2\}$$

Solución gráfica:

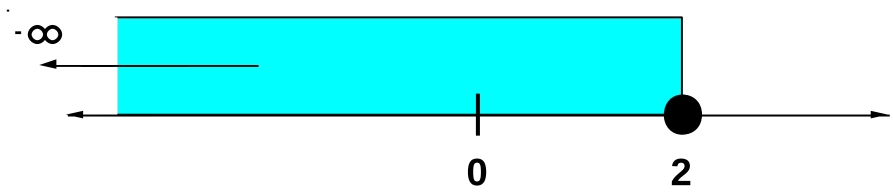


Figura 2.5

(2.8) $$\frac{4}{3} - \frac{5}{4}X + \frac{1}{2}X - 4 > \frac{3}{2}X - 3 + 2X - \frac{1}{4}X$$

Solución.
Transponiendo términos:

$$-\frac{5}{4}X + \frac{1}{2}X - \frac{3}{2}X - 2X + \frac{1}{4}X > -\frac{4}{3} + 4 - 3$$

Mínimo común múltiplo de denominadores:

$$\frac{-5X + 2X - 6X - 8X + X}{4} > \frac{-4 + 12 - 9}{3}$$

Términos semejantes:

$$\frac{3X - 19}{4} > \frac{12 - 13}{3}$$

$$\frac{-16X}{4} > \frac{-1}{3}$$

De donde:

$$-48X > -4$$

Multiplicando por (-1):

$$48X < 4$$

Finalmente:

$$X < \frac{4}{48} \Longrightarrow < \frac{1}{12}$$

Su solución expresada como intervalo es la siguiente:

$$(-\infty, \frac{1}{12})$$

Su notación conjuntista es:

$$\{x/(-\infty < x < \frac{1}{12})\}$$

Representado como un rango de valores:

$$\{x/x < \frac{1}{12}\}$$

Solución gráfica:

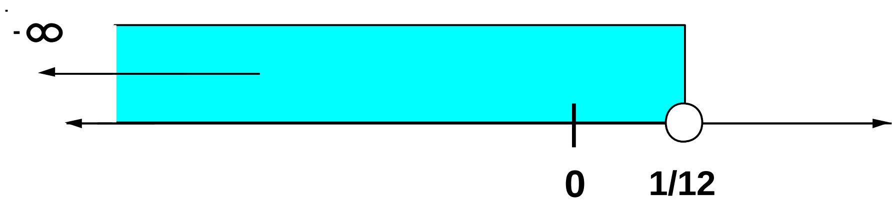


Figura 2.6

2.4.2. Desigualdades No Lineales

Ejemplos de cálculo:
En los siguientes ejercicios resolver las desigualdades.

(2.9) $$X^2 - 16 \geq 0$$

Primer método:
Transponiendo términos:

$$X^2 \geq 16$$

De donde:

$$X \geq \sqrt{16} \Longrightarrow X \geq \pm 4$$

Ahora, con la raíz positiva se conserva el sentido de la desigualdad y con la raíz negativa se invierte el sentido de la desigualdad, de lo cual se obtiene:

$$X \geq 4 \ \ o \ \ X \leq -4$$

Solución gráfica:

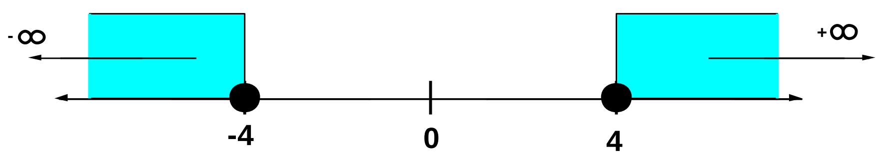


Figura 2.7

Segundo método:

$$X^2 - 16 \geq 0$$

Factorando (diferencia de cuadrados):

$$(X+4)(X-4) \geq 0$$

Posibilidades

a) $+$ **y** $+$

o

b) **-** **y** **-**

Donde se debe recordar que "y" $\Longrightarrow$ intersección de conjuntos, y "o" $\Longrightarrow$ unión de conjuntos.

Analizando la posibilidad a, los dos factores positivos:

$$(X+4) \geq 0 \quad y \quad (X-4) \geq 0$$

$$X \geq -4 \quad y \quad X \geq 4$$

.

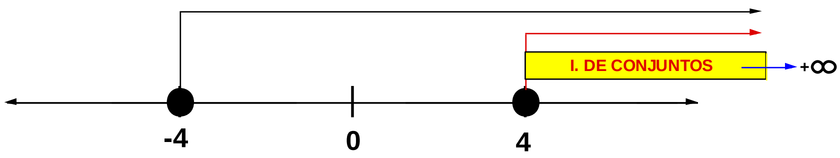


Figura 2.8

Solución a: $X \geq 4$

Analizando la posibilidad b, los dos factores negativos:

$$(X+4) \leq 0 \quad y \quad (X-4) \leq 0$$

$$X \geq -4 \quad y \quad X \leq 4$$

.

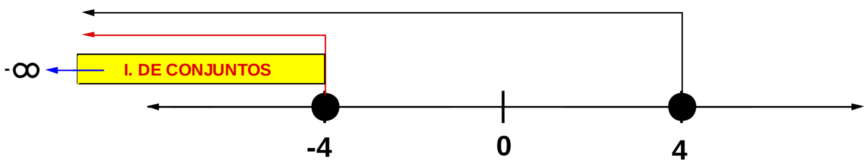


Figura 2.9

Solución b: $X \leq 4$
Solución final, solución "a" unión solución "b":

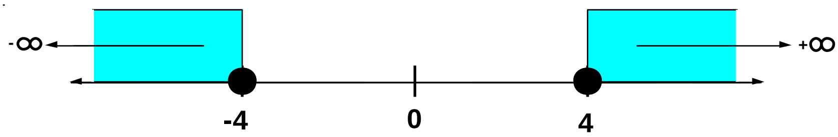


Figura 2.10

$$\{X/X \geq 4 \quad o \quad X \leq -4\}$$

(2.10) $$X^2 - 9 \leq 0$$

Factorando (diferencia de cuadrados):

$$(X+3)(X-3) \leq 0$$

Posibilidades

a) + **y** -

o

b) - **y** +

Analizando la posibilidad a:

$$(X + 3) \geq 0 \quad y \quad (X - 3) \leq 0$$

$$X \geq -3 \quad y \quad X \leq 3$$

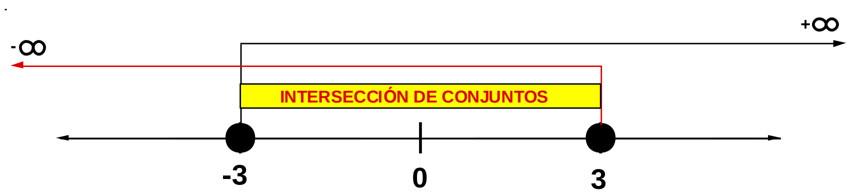


Figura 2.11

Solución a: $[-3 \leq X \leq 3]$

Analizando la posibilidad b:

$$(X + 3) \leq 0 \quad y \quad (X - 3) \geq 0$$

$$X \leq -3 \quad y \quad X \geq 3$$

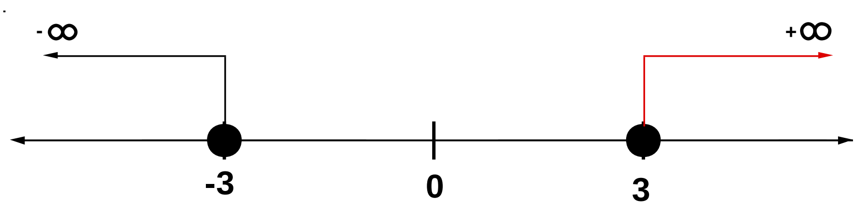


Figura 2.12

No existe intersección de conjuntos, por lo que
Solución b: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
De acuerdo con las leyes del álgebra de conjuntos se tiene:

$$A \cup \phi = A$$

o

$$A \cap \phi = A$$

Es decir un conjunto A, unión con el conjunto vacío es A; y un conjunto A intersección con el conjunto vacío es vacío.

De esta manera la solución final será:

.

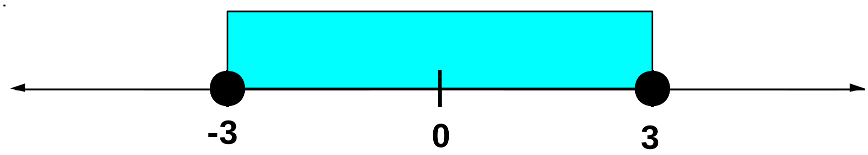


Figura 2.13

Es decir:

$$\{X/[-3 \leq X \leq 3]\}$$

(2.11) $$X^2 + X - 6 < 0$$

Factorando (trinomio de la forma $X^2 + BX + C$):

$$(X+3)(X-2) < 0$$

Posibilidades

a) + **y** -

o

b) - **y** +

Analizando la posibilidad a:

$$(X+3) > 0 \text{ y } (X-2) < 0$$
$$X > -3 \text{ y } X < 2$$

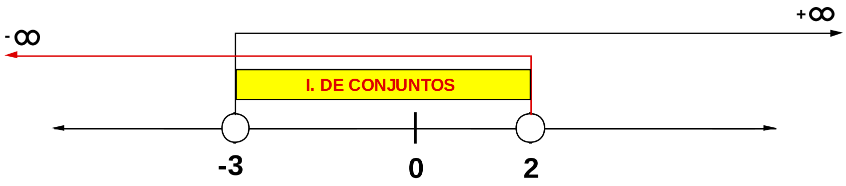


Figura 2.14

Solución a:

$$(-3 < X < 2)$$

Analizando la posibilidad b:

$$(X + 3) < 0 \quad \text{y} \quad (X - 2) > 0$$
$$X < -3 \quad \text{y} \quad X > 2$$

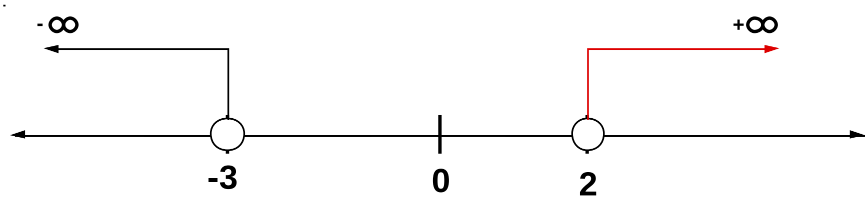


Figura 2.15

No existe intersección de conjuntos, por lo que
Solución b: ϕ, es decir conjunto vacío.
De esta manera la solución final será:

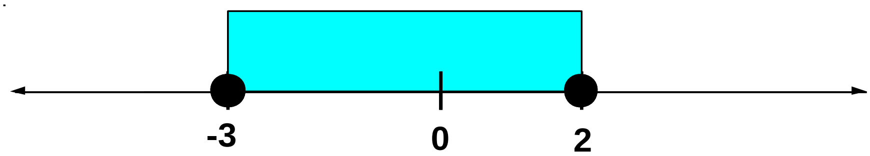


Figura 2.16

Es decir:

$$\{X/(-3 < X < 2)\}$$

(2.12) $$2X^2 + 2X - 4 > 0$$

Factorando (trinomio de la forma $AX^2 + BX + C$):

$$(2X + 4)(X - 1) > 0$$

Posibilidades

a) $+$ **y** $+$

o

b) **-** **y** **-**

Analizando la posibilidad a:

$$\begin{array}{ccc} (2X+4) > 0 & \text{y} & (X-1) > 0 \\ X > -2 & \text{y} & X > 1 \end{array}$$

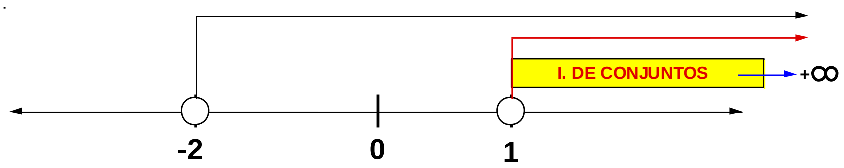


Figura 2.17

Solución a:

$$X > 1$$

Analizando la posibilidad b:

$$\begin{array}{ccc} (2X+4) < 0 & \text{y} & (X-1) < 0 \\ X < -2 & \text{y} & X < 1 \end{array}$$

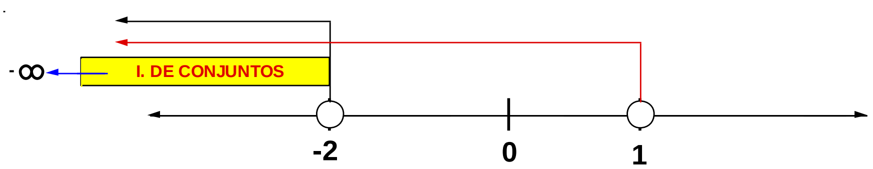


Figura 2.18

Solución b:

$$X < -2$$

De esta manera la solución final será:

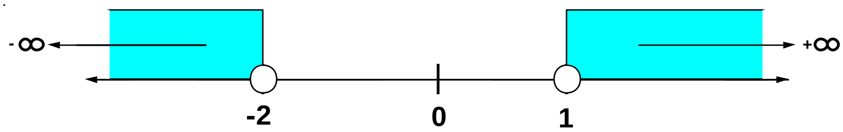


Figura 2.19

Es decir:

$$\{X/X > 1 \text{ o } X < -2\}$$

(2.13) $$X^3 + 2X^2 - 8X > 0$$

Factorando (factor común y trinomio de la forma $X^2 + BX + C$):

$$X(X + 4)(X - 2) > 0$$

Posibilidades

a) + **y** + **y** +

o

b) + **y** **-** **y** **-**

o

c) **-** **y** + **y** **-**

o

d) **-** **y** **-** **y** +

Analizando la posibilidad a:

$$(X) > 0 \quad \text{y} \quad (X + 4) > 0 \quad \text{y} \quad (X - 2) > 0$$
$$X > 0 \quad \text{y} \quad X > -4 \quad \text{y} \quad X > 2$$

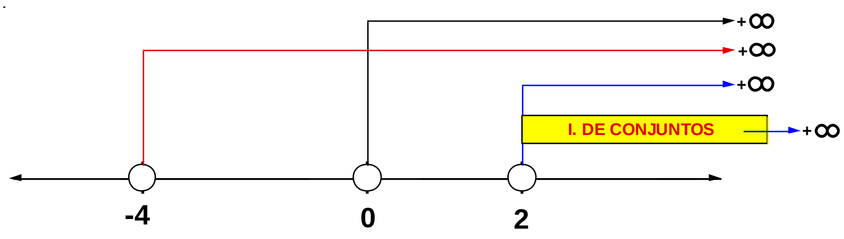


Figura 2.20

Solución a:

$$X > 2$$

Analizando la posibilidad b:

$$(X) > 0 \quad \text{y} \quad (X+4) < 0 \quad \text{y} \quad (X-2) < 0$$
$$X > 0 \quad \text{y} \quad X < -4 \quad \text{y} \quad X < 2$$

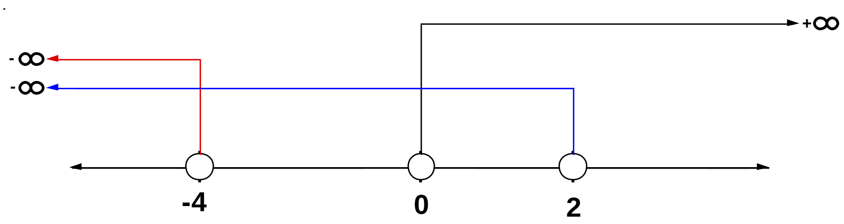


Figura 2.21

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución b: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad c:

$$(X) < 0 \quad \text{y} \quad (X+4) > 0 \quad \text{y} \quad (X-2) < 0$$
$$X < 0 \quad \text{y} \quad X > -4 \quad \text{y} \quad X < 2$$

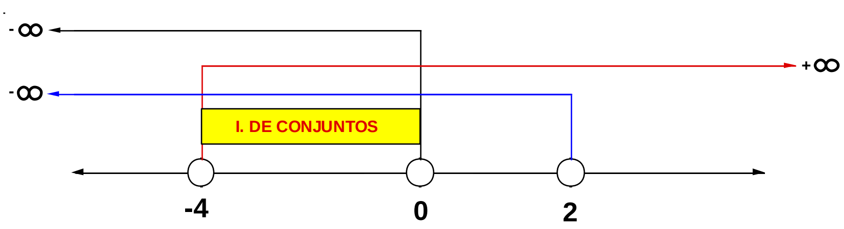


Figura 2.22

Solución c: $(-4 < X < 0)$

Analizando la posibilidad d:

$$(X) < 0 \quad y \quad (X+4) < 0 \quad y \quad (X-2) > 0$$
$$X < 0 \quad y \quad X < -4 \quad y \quad X > 2$$

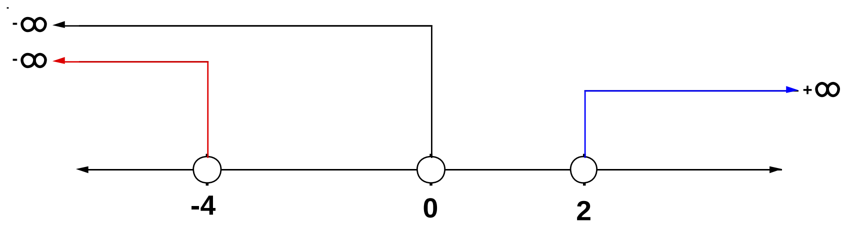


Figura 2.23

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución d: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
Como se puede observar al ser cuatro el número de posibilidades, se verifica que dos de ellas generan solución y las otras dos no, por lo tanto.
La solución final será:

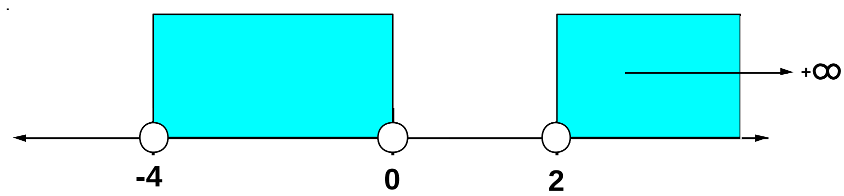


Figura 2.24

Es decir:

$$\{X/X > 2 \quad o \quad (-4 < X < 0)\}$$

(2.14) $$X^3 + 2X^2 - 15X \leq 0$$

Factorando (factor común y trinomio de la forma $X^2 + BX + C$):

$$X(X+5)(X-3) \leq 0$$

Posibilidades

a) - **y** - **y** -

o

b) - **y** + **y** +

o

c) + **y** - **y** +

o

d) + **y** + **y** -

Analizando la posibilidad a:

$$(X) \leq 0 \quad \text{y} \quad (X+5) \leq 0 \quad \text{y} \quad (X-3) \leq 0$$
$$X \leq 0 \quad \text{y} \quad X \leq -5 \quad \text{y} \quad X \leq 3$$

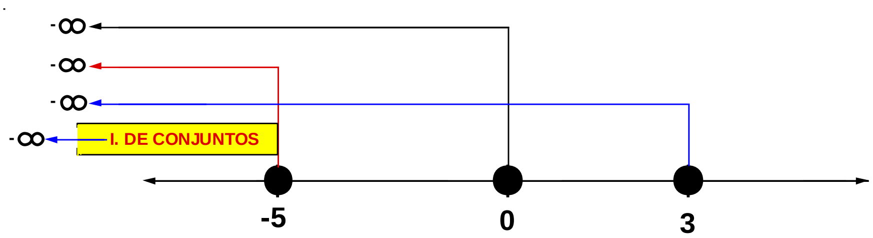


Figura 2.25

Solución a: $X \leq -5$

Analizando la posibilidad b:

$$(X) \leq 0 \quad \text{y} \quad (X+5) \geq 0 \quad \text{y} \quad (X-3) \geq 0$$
$$X \leq 0 \quad \text{y} \quad X \geq -5 \quad \text{y} \quad X \geq 3$$

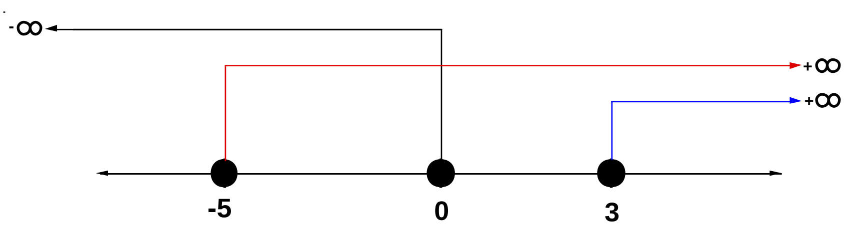


Figura 2.26

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución b: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad c:

$$(X) \geq 0 \quad \text{y} \quad (X+5) \leq 0 \quad \text{y} \quad (X-3) \geq 0$$
$$X \geq 0 \quad \text{y} \quad X \leq -5 \quad \text{y} \quad X \geq 3$$

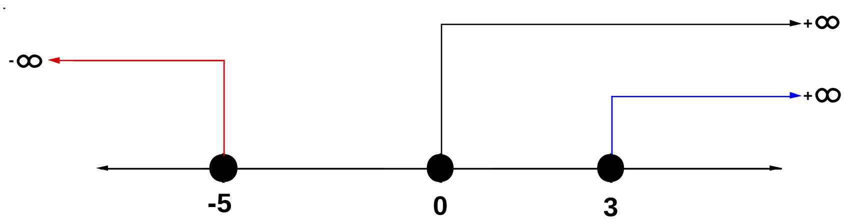


Figura 2.27

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución c: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad d:

$$(X) \geq 0 \quad \text{y} \quad (X+5) \geq 0 \quad \text{y} \quad (X-3) \leq 0$$
$$X \geq 0 \quad \text{y} \quad X \geq -5 \quad \text{y} \quad X \leq 3$$

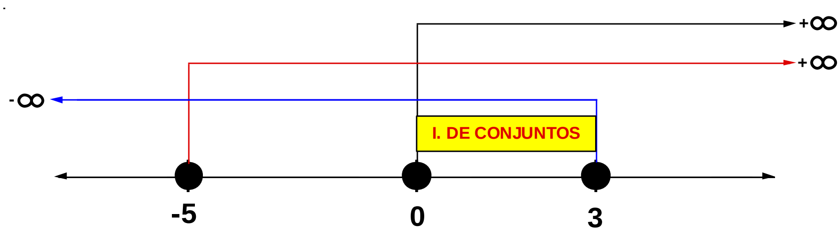


Figura 2.28

Solución d: $[0 \leq X \leq 3]$

Como se puede observar al ser cuatro el número de posibilidades, se verifica que dos de ellas generan solución y las otras dos no, por lo tanto.

La solución final será:

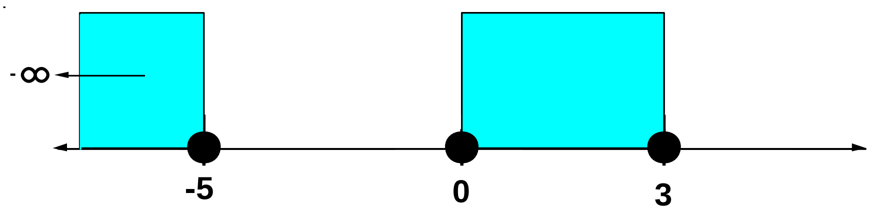


Figura 2.29

EXPRESIONES NO FACTORIZABLES.

$$X^2 - X - 1 < 0 \qquad (2.15)$$

Aplicando la relación para la solución de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tenemos:

$$a = 1, b = -1, c = -1$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

De esta manera se tendrá:

$$X1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$$

$$X1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$$

Generando factores se tiene:

$$(X - 1{,}618)(X + 0{,}618) < 0$$

Posibilidades

a) + **y** -

o

b) - **y** +

Analizando la posibilidad a:

$$(X - 1{,}618) > 0 \quad \text{y} \quad (X + 0{,}618) < 0$$
$$X > 1{,}618 \quad \text{y} \quad X < -0{,}618$$

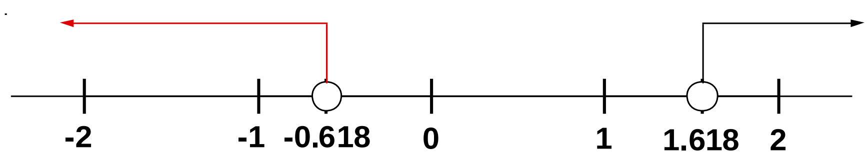


Figura 2.30

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución a: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad b:

$$(X - 1{,}618) < 0 \quad \text{y} \quad (X + 0{,}618) > 0$$
$$X < 1{,}618 \quad \text{y} \quad X > -0{,}618$$

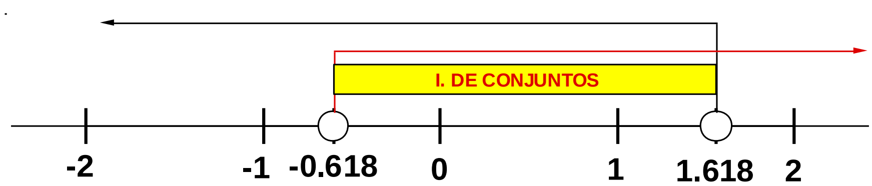


Figura 2.31

Solución b: $(-0{,}618 < X < 1{,}618)$

Como se vio anteriormente de acuerdo con las leyes del álgebra de conjuntos se tiene

$$A \cup \phi = A$$

$$A \cap \phi = \phi$$

Es decir un conjunto A, unión con el conjunto vacío es A; y un conjunto A intersección con el conjunto vacío es vacío.

De esta manera la solución final será:

.

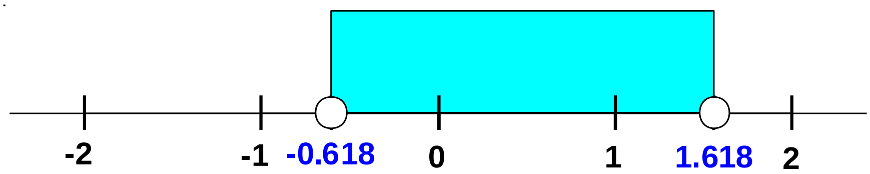


Figura 2.32

Es decir:

$\{X/(-0{,}618 < X < 1{,}618)\}$

EXPRESIONES QUE INVOLUCRAN VARIABLES EN EL DENOMINADOR.

$$\frac{3}{2X} - \frac{4}{3} \geq \frac{5}{4X} + \frac{2}{3} \tag{2.16}$$

Resolviendo se tendrá:

$$\frac{9-8X}{6X} \geq \frac{15+8X}{12X}$$

$$12X(9-8X) \geq 6X(15+8X)$$

$$108X - 96X^2 \geq 90X + 48X^2$$

$$108X - 96X^2 - 90X - 48X^2 \geq 0$$

$$-144X^2 + 18X \geq 0$$

Factorando:

$$X(-144X + 18) \geq 0$$

Posibilidades

a) $+$ **y** $+$

o

b) **-** **y** **-**

Analizando la posibilidad a:

$$X \geq 0 \quad y \quad (-144X + 18) \geq 0$$

$$X \geq 0 \quad y \quad -144X \geq -18$$

$$X \geq 0 \quad y \quad 144X \leq 18$$

$$X \geq 0 \quad y \quad X \leq \frac{18}{144}$$

$$X \geq 0 \quad y \quad X \leq \frac{1}{8}$$

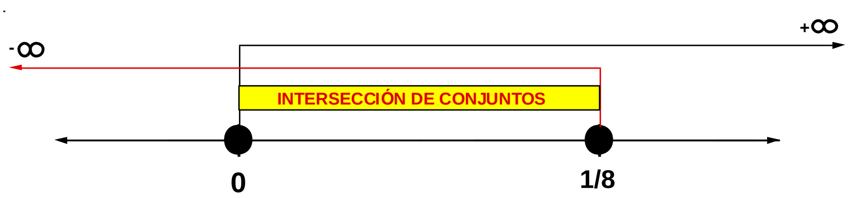


Figura 2.33

Solución a: $[0 \leq X \leq 1/8]$

Analizando la posibilidad b:

$$X \leq 0 \quad \text{y} \quad (-144X + 18) \leq 0$$

$$X \leq 0 \quad \text{y} \quad -144X \leq -18$$

$$X \leq 0 \quad \text{y} \quad 144X \geq 18$$

$$X \leq 0 \quad \text{y} \quad X \geq \tfrac{18}{144}$$

$$X \leq 0 \quad \text{y} \quad X \geq \tfrac{1}{8}$$

Figura 2.34

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución b: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
De esta manera la solución final será:

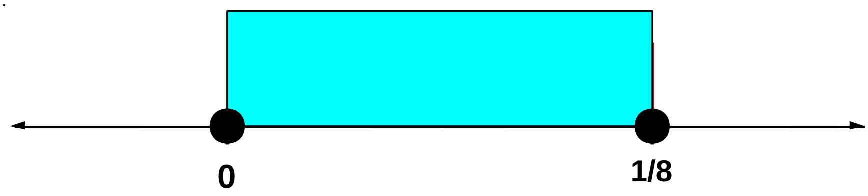


Figura 2.35

Es decir:

$$\{X/[0 \leq X \leq 1/8]\}$$

(2.17)
$$\frac{(X-1)}{(X+3)} \leq 0$$

Posibilidades

a) **y** $\begin{array}{c} + \\ - \end{array}$

o

b) **y** $\begin{array}{c} - \\ + \end{array}$

Analizando la posibilidad a:

$$X - 1 \geq 0 \quad \text{y} \quad X + 3 < 0$$

$$X \geq 1 \quad \text{y} \quad X < -3$$

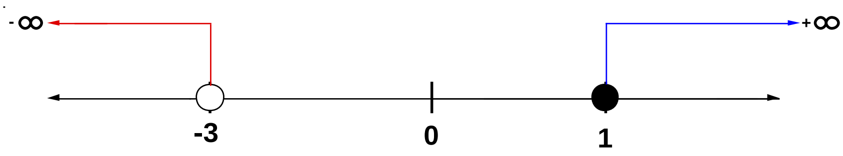


Figura 2.36

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución a: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad b:

$$X - 1 \leq 0 \quad \text{y} \quad X + 3 > 0$$

$$X \leq 1 \quad \text{y} \quad X > -3$$

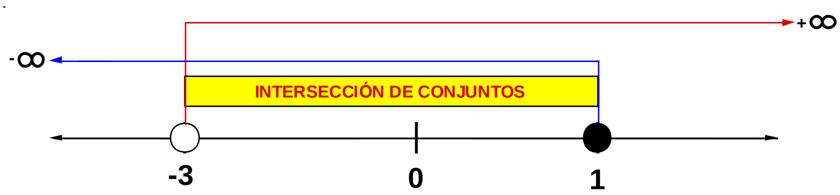


Figura 2.37

Solución b: $[-3 < X \leq 1]$
De esta manera la solución final será:

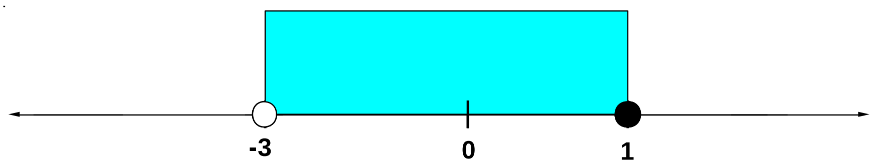


Figura 2.38

Es decir:

$$\{X/(-3 < X \leq 1]\}$$

(2.18) $$\frac{X^2 + 2X - 8}{X + 1} \geq 0$$

Factorando el numerador:

$$\frac{(X+4)(X-2)}{(X+1)} \geq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+}$

o

b) **y** $\frac{-}{-}$

Posibilidades específicas:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+\ y\ +}{+}$ o b) **y** $\frac{-\ y\ -}{+}$ o c) **y** $\frac{+\ y\ -}{-}$ o d) **y** $\frac{-\ y\ +}{-}$

Analizando la posibilidad a:

$$X+4 \geq 0 \quad y \quad X-2 \geq 0 \quad y \quad X+1 > 0$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

$$X \geq -4 \quad y \quad X \geq 2 \quad y \quad X > -1$$

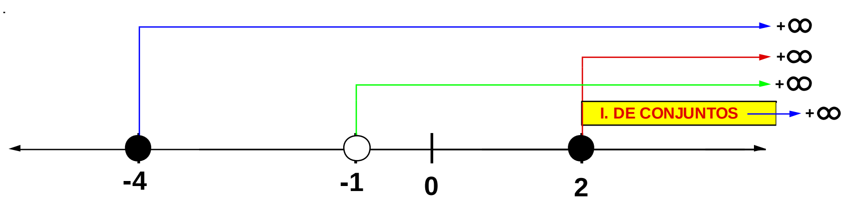


Figura 2.39

Solución a: $X \geq 2$

Analizando la posibilidad b:

$$X + 4 \leq 0 \quad y \quad X - 2 \leq 0 \quad y \quad X + 1 > 0$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

$$X \leq -4 \quad y \quad X \leq 2 \quad y \quad X > -1$$

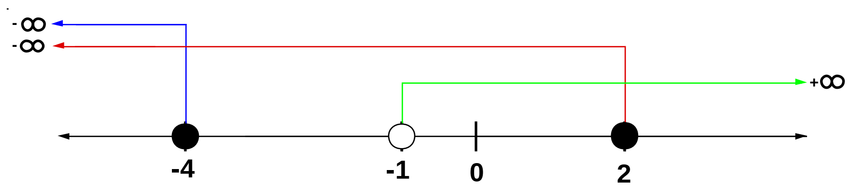


Figura 2.40

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución b: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad c:

$$X + 4 \geq 0 \quad \text{y} \quad X - 2 \leq 0 \quad \text{y} \quad X + 1 < 0$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

$$X \geq -4 \quad \text{y} \quad X \leq 2 \quad \text{y} \quad X < -1$$

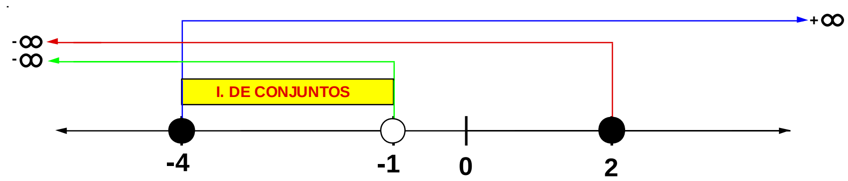


Figura 2.41

Solución c: $[-4 \leq X < -1)$

Analizando la posibilidad d:

$$X + 4 \leq 0 \quad \text{y} \quad X - 2 \geq 0 \quad \text{y} \quad X + 1 < 0$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

$$X \leq -4 \quad \text{y} \quad X \geq 2 \quad \text{y} \quad X < -1$$

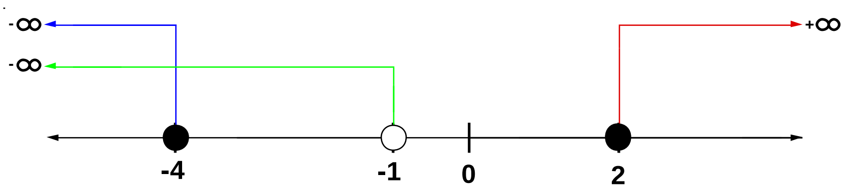


Figura 2.42

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:

Solución d: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Como se puede verificar al ser cuatro el número de posibilidades, se verifica que dos de ellas generan solución y las otras dos no. De esta manera la solución final será:

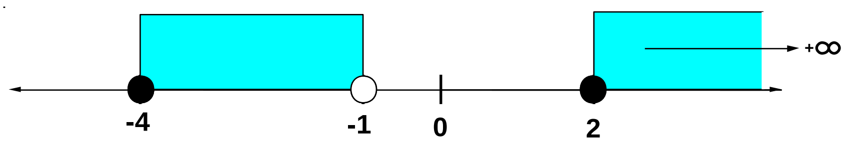


Figura 2.43

Es decir:

$$\{X/[-4 \leq X < -1) \quad o \quad X \geq 2\}$$

Observese que, si analizamos el denominador y su posibilidad de convertirse en cero tendríamos:

$$X + 1 \neq 0$$

$$X \neq -1$$

El valor de X= -1, es el único real que vuelve cero a la expresión, el cual ha sido excluido de la solución final en el análisis previo.

(2.19) $$(X + 2)/(X^2 - 2X - 3) \leq 0$$

Factorando el denominador:

$$\frac{X+2}{(X-3)(X+1)} \leq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{-}$

o

b) **y** $\frac{-}{+}$

Posibilidades específicas:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+\ y\ -}$ o b) **y** $\frac{+}{-\ y\ +}$ o c) **y** $\frac{-}{+\ y\ +}$ o d) **y** $\frac{-}{-\ y\ -}$

Analizando la posibilidad a:

$$X+2 \geq 0 \quad \text{y} \quad X-3>0 \quad \text{y} \quad X+1<0$$

Nótese que, en las expresiones del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

$$X \geq -2 \quad \text{y} \quad X>3 \quad \text{y} \quad X<-1$$

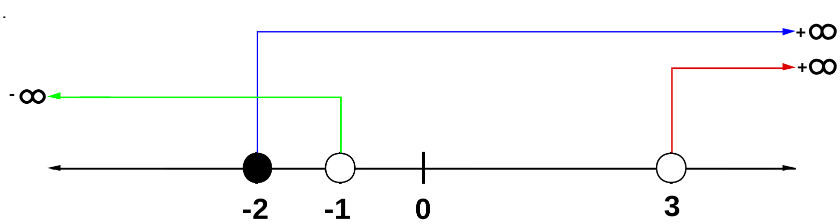


Figura 2.44

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución a: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad b:

$$X + 2 \geq 0 \quad \text{y} \quad X - 3 < 0 \quad \text{y} \quad X + 1 > 0$$

Nótese que, en las expresiones del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

$$X \geq -2 \quad \text{y} \quad X < 3 \quad \text{y} \quad X > -1$$

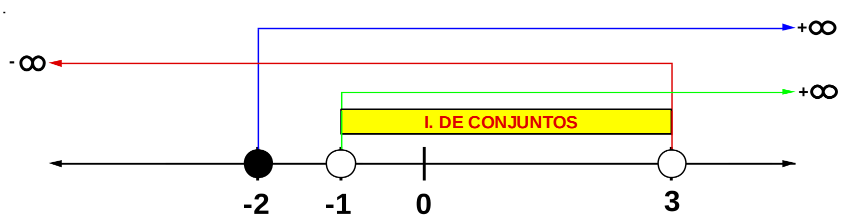


Figura 2.45

Solución b: $(-1 < X < 3)$

Analizando la posibilidad c:

$$X + 2 \leq 0 \quad \text{y} \quad X - 3 > 0 \quad \text{y} \quad X + 1 > 0$$

Nótese que, en las expresiones del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

$$X \leq -2 \quad \text{y} \quad X > 3 \quad \text{y} \quad X > -1$$

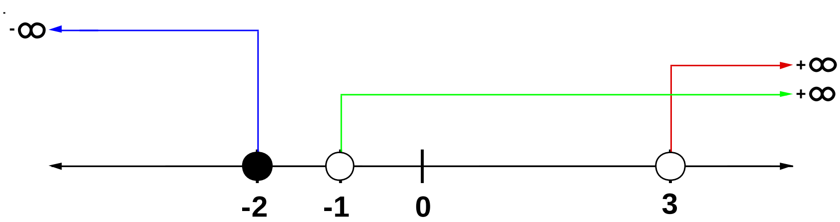


Figura 2.46

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto: Solución c: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad d:

$$X + 2 \leq 0 \quad \text{y} \quad X - 3 < 0 \quad \text{y} \quad X + 1 < 0$$

Nótese que, en las expresiones del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

$$X \leq -2 \quad \text{y} \quad X < 3 \quad \text{y} \quad X < -1$$

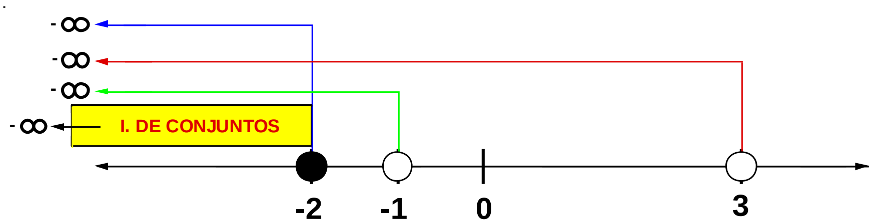


Figura 2.47

Solución d: $X \leq -2$

Como se puede verificar al ser cuatro el número de posibilidades, se verifica que dos de ellas generan solución y las otras dos no. De esta manera la solución final será:

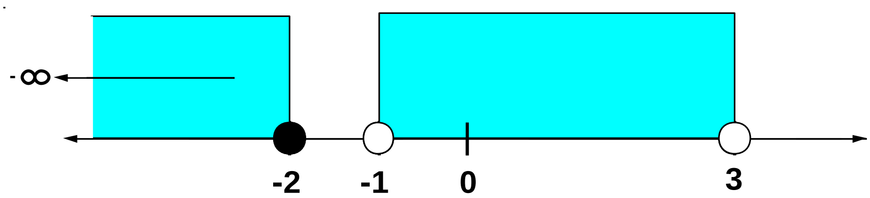


Figura 2.48

Es decir:

$$\{X / X \leq -2 \quad o \quad (-1 < X < 3)\}$$

Observe que, si analizamos el denominador y su posibilidad de convertirse en cero tendríamos:

$$X - 3 \neq 0 \quad \text{y} \quad X + 1 \neq 0$$

$$X \neq 3 \quad \text{y} \quad X \neq -1$$

Los valores de X= 3 y X= -1, son los únicos reales que vuelven cero a las expresiones, los cuales han sido excluidos de la solución final en el análisis previo.

$$\frac{X^2 + X - 2}{X^2 - X - 12} > 0 \tag{2.20}$$

Factorando numerador y denominador:

$$\frac{(X+2)(X-1)}{(X-4)(X+3)} > 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) $\mathbf{y}\quad \frac{+}{+}$

o

b) $\mathbf{y}\quad \frac{-}{-}$

Posibilidades específicas de a:

Posibilidades

a) $\mathbf{y}\quad \frac{+\ y\ +}{+\ y\ +}$ o b) $\mathbf{y}\quad \frac{-\ y\ -}{-\ y\ -}$ o c) $\mathbf{y}\quad \frac{+\ y\ +}{-\ y\ -}$ o d) $\mathbf{y}\quad \frac{-\ y\ -}{+\ y\ +}$

Posibilidades específicas de b:

Posibilidades

a) $\mathbf{y}\quad \frac{+\ y\ -}{-y+}$ o b) $\mathbf{y}\quad \frac{-y+}{+\ y-}$ o c) $\mathbf{y}\quad \frac{+\ y\ -}{+\ y\ -}$ o d) $\mathbf{y}\quad \frac{-\ y\ +}{-\ y\ +}$

Analizando la posibilidad a:

$$X+2>0 \quad \text{y} \quad X-1>0 \quad \text{y} \quad X-4>0 \quad \text{y} \quad X+3>0$$

Resolviendo:

$$X > -2 \quad \text{y} \quad X > 1 \quad \text{y} \quad X > 4 \quad \text{y} \quad X > -3$$

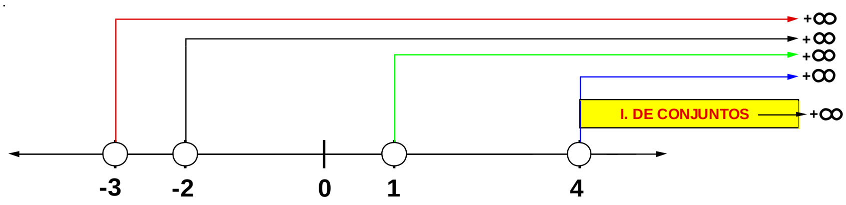


Figura 2.49

Solución a: $X > 4$

Analizando la posibilidad b:

$$X + 2 < 0 \quad \text{y} \quad X - 1 < 0 \quad \text{y} \quad X - 4 < 0 \quad \text{y} \quad X + 3 < 0$$

Resolviendo:

$$X < -2 \quad \text{y} \quad X < 1 \quad \text{y} \quad X < 4 \quad \text{y} \quad X < -3$$

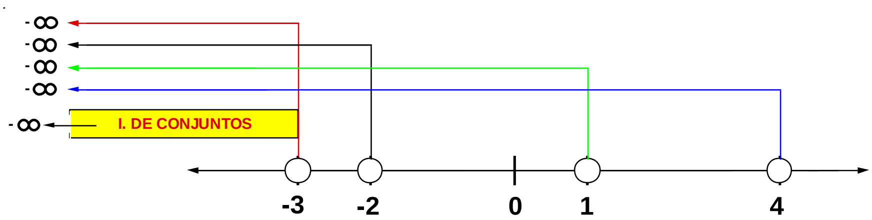


Figura 2.50

Solución b: $X < -3$

Analizando la posibilidad c:

$$X + 2 > 0 \quad \text{y} \quad X - 1 > 0 \quad \text{y} \quad X - 4 < 0 \quad \text{y} \quad X + 3 < 0$$

Resolviendo:

$$X > -2 \quad \text{y} \quad X > 1 \quad \text{y} \quad X < 4 \quad \text{y} \quad X < -3$$

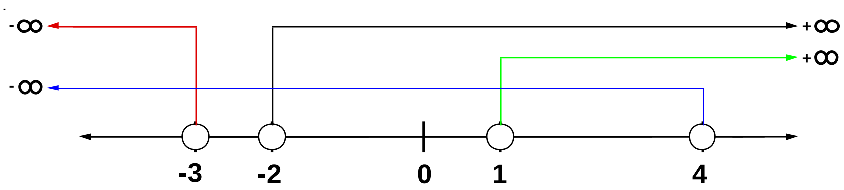


Figura 2.51

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución c: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad d:

$$X + 2 < 0 \quad \text{y} \quad X - 1 < 0 \quad \text{y} \quad X - 4 > 0 \quad \text{y} \quad X + 3 > 0$$

Resolviendo:

$$X < -2 \quad \text{y} \quad X < 1 \quad \text{y} \quad X > 4 \quad \text{y} \quad X > -3$$

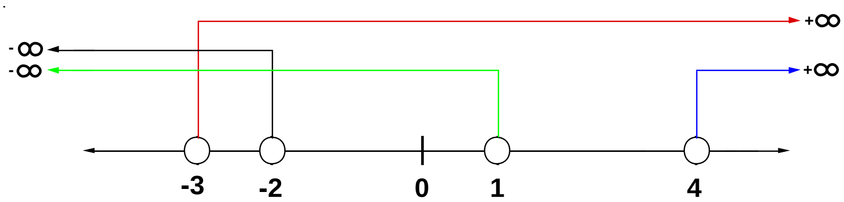


Figura 2.52

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución d: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad e:

$$X + 2 > 0 \quad \text{y} \quad X - 1 < 0 \quad \text{y} \quad X - 4 < 0 \quad \text{y} \quad X + 3 > 0$$

Resolviendo:

$$X > -2 \quad \text{y} \quad X < 1 \quad \text{y} \quad X < 4 \quad \text{y} \quad X > -3$$

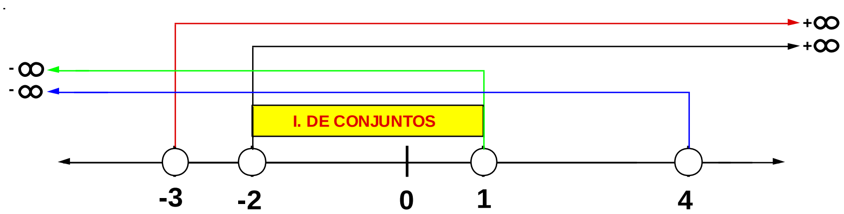


Figura 2.53

Solución e: $(-2 < X < 1)$

Analizando la posibilidad f:

$$X + 2 < 0 \quad \text{y} \quad X - 1 > 0 \quad \text{y} \quad X - 4 > 0 \quad \text{y} \quad X + 3 < 0$$

Resolviendo:

$$X < -2 \quad \text{y} \quad X > 1 \quad \text{y} \quad X > 4 \quad \text{y} \quad X < -3$$

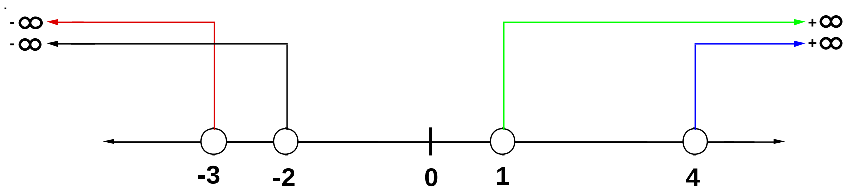


Figura 2.54

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución f: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad g:

$$X + 2 > 0 \quad \text{y} \quad X - 1 < 0 \quad \text{y} \quad X - 4 > 0 \quad \text{y} \quad X + 3 < 0$$

Resolviendo:

$$X > -2 \quad \text{y} \quad X < 1 \quad \text{y} \quad X > 4 \quad \text{y} \quad X < -3$$

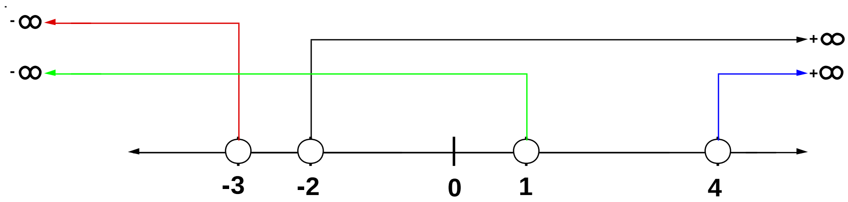


Figura 2.55

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución g: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

Analizando la posibilidad h:

$$X + 2 < 0 \quad \text{y} \quad X - 1 > 0 \quad \text{y} \quad X - 4 < 0 \quad \text{y} \quad X + 3 > 0$$

Resolviendo:

$$X < -2 \quad \text{y} \quad X > 1 \quad \text{y} \quad X < 4 \quad \text{y} \quad X > -3$$

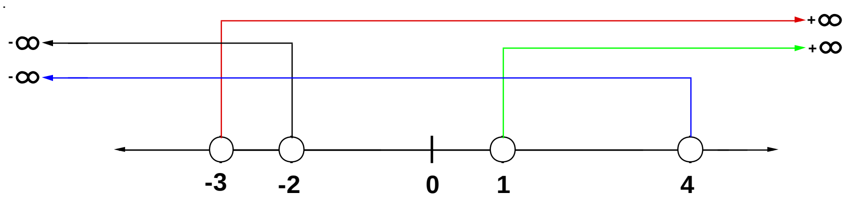


Figura 2.56

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto: Solución h: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.

De esta manera la solución final será:

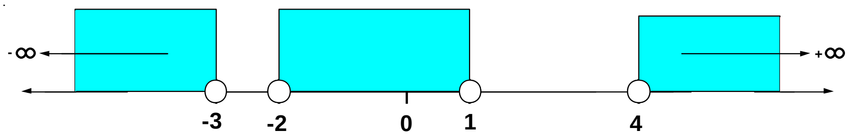


Figura 2.57

Es decir:

$$\{X/X < -3 \quad \text{o} \quad (-2 < X < 1) \quad \text{o} \quad X > 4\}$$

3 Funciones

3.1. Introducción

Una función debe ser entendida fundamentalmente como una correspondencia o relación, en este caso de tipo matemático, entre dos conjuntos específicos. El término función fue introducido por primera vez por el francés René Descartes alrededor del año 1637. Una función matemática obedece a un proceso de orden lógico que puede expresarse literalmente como “depende de”, o “está en función de”.

Por citar ejemplos de fácil comprensión podríamos manifestar que, el pago de una planilla de agua, depende o está en función directamente del consumo en m^3; la cantidad de combustible empleado por un vehículo para desplazarse de un lugar a otro, depende o está en función de la distancia a donde queramos llegar; o finalmente, si se requiere el envío de una encomienda por avión, el costo depende o está en función del peso del mismo.

Designando como X e Y a dos variables, las cuales están vinculadas o asociadas por medio de alguna relación específica, de tal manera que si a la variable X se le asignan valores libremente, la variable Y dependerá de esos valores para asumir los propios, es por ello que la primera toma el nombre de variable independiente, mientras que la segunda que depende directamente de la primera toma el nombre de dependiente; los valores admisibles de la variable X constituyen el dominio de la función, mientras los valores resultantes de la variable Y constituyen el codominio, contradominio o ámbito de la función.

3.2. Definición

Una función, se la puede definir como un conjunto de parejas ordenadas de números reales (X, Y); que responden a una regla de correspondencia, y en los cuales no pueden existir dos pares ordenados diferentes que tengan igual el mismo valor de su abscisa. Como se manifestó anteriormente, al conjunto de valores admisibles de X se lo denominará dominio de la función, y al conjunto de valores resultantes de Y contradominio o ámbito de la función.

Por consiguiente, denotando como "f" a una función, entonces su gráfica estará formada por un conjunto infinito de todos los puntos (X, Y) que pertenezcan al conjunto de los números reales R_2 y que satisfagan su definición.

3.3. Diferencia entre ecuación y función

Recordemos, una ecuación es una expresión matemática que se define como una igualdad que se establece entre dos expresiones algebraicas reguladas por un signo de igualdad, y a las cuales se las denomina miembros de la ecuación (derecho e izquierdo); una igualdad puede ser numérica o algebraica, y en el segundo caso debe poseer al menos una incógnita, por ejemplo:

$$Y = X^2$$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

$$10 + 5 = 15$$

Una función constituye de hecho una ecuación, sin embargo, una función ilustra la correspondencia entre variables, una variable que depende de la otra en base a una expresión matemática, lo más importante es que, para cada valor de la variable independiente en la función solo debe existir un valor único para la función o la variable dependiente, de las expresiones citadas anteriormente solo la primera constituye una función.

Gráficamente se puede diferenciar una ecuación de una función de la siguiente manera:

Al trazar una recta vertical dentro del dominio de una función, esta debe interceptar a su lugar geométrico única y exclusivamente en un punto a la vez, como se puede apreciar en los siguientes ejemplos gráficos.

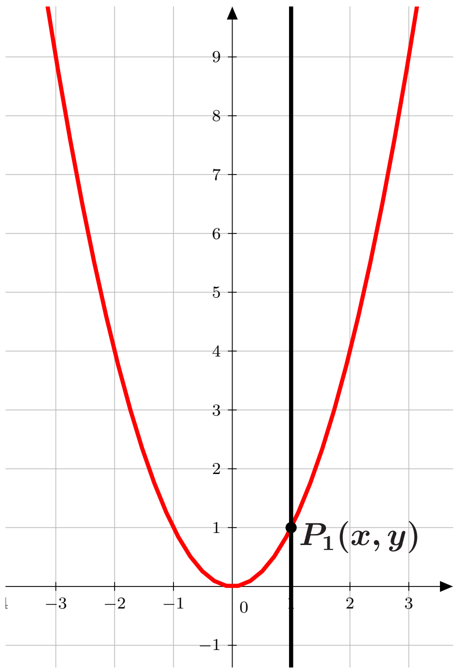


Figura 3.1

Como se puede observar el dominio de esta curva son los reales, y toda recta vertical que se trace dentro de su campo de existencia interceptará exclusivamente a la misma en un único punto a la vez, por lo que esta gráfica corresponde a una función.

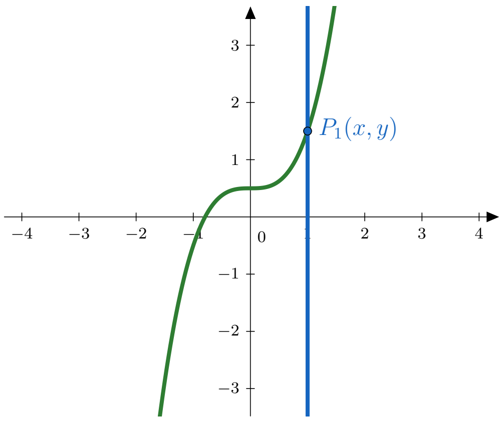


Figura 3.2

Al igual que la anterior, el dominio de esta curva son los reales, y toda recta vertical que se trace dentro de su campo de existencia interceptará exclusivamente a la misma en un **único** punto a la vez, por lo que esta gráfica también corresponde a una función.

Ahora analicemos lo que sucede con el gráfico de una ecuación.

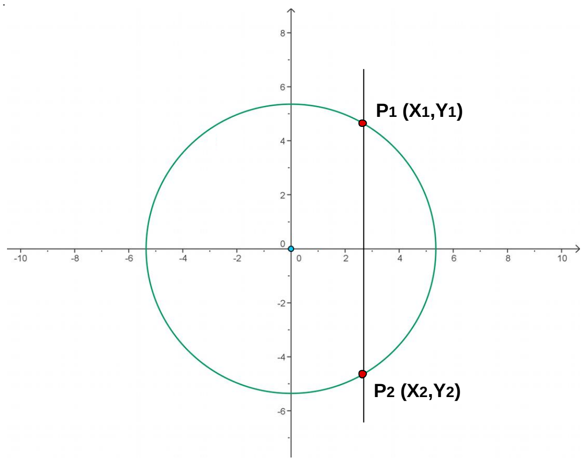


Figura 3.3

La recta vertical, intercepta a la gráfica en dos puntos a la vez, por lo que el valor de la abscisa del punto uno “X_2” es exactamente igual a la abscisa del punto dos “X_2”, la gráfica corresponde a una ecuación.

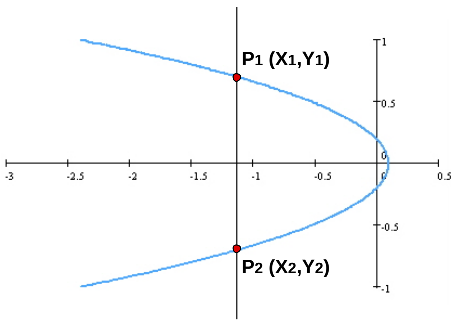


Figura 3.4

Al igual que la anterior, la recta vertical intercepta a la gráfica en dos puntos a la vez, por lo que el valor de la abscisa del punto uno “X_1” es exactamente igual a la abscisa del punto dos “X_2”, la gráfica corresponde a una ecuación.

Finalmente se dejan como ejemplos de funciones las siguientes gráficas.

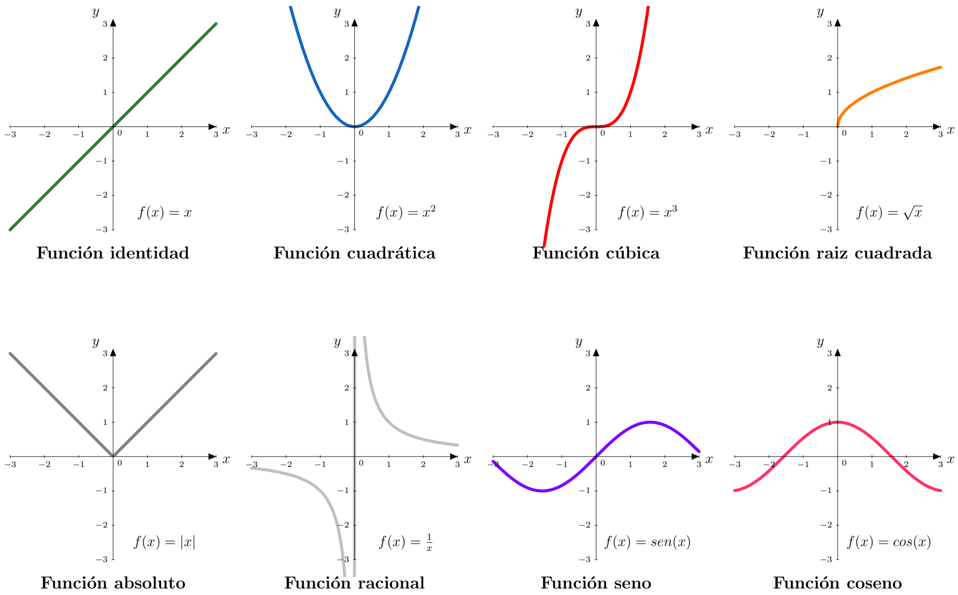


Figura 3.5

3.4. Notación de funciones

Una función puede denotarse mediante el empleo de diferente simbología, sin embargo, lo más usual es la utilización de letras minúsculas como f, g, h, etc.

El conjunto de valores de X perteneciente a los números reales es el dominio de la función y, el conjunto Y de números reales asignados a los valores de (X) en X es el contradominio o rango de la función.

De esta manera se tendrá:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$x \longrightarrow f(x) = y$$

$Y = f(x)$, se lee "Y es igual a f de X"

La función, que se denota por $Y = f(x)$, asocia a cada valor de X que pertenece a R_2 un único valor de Y, donde Y también pertenece al mismo conjunto infinito de números reales.

3.5. Operaciones con funciones

El campo operacional, o álgebra de funciones se define de la siguiente manera

3.5.1. Suma o Adicón

La suma de dos funciones, "f" y "g" que se denota por "$f+g$", constituye la función definida por $(f+g)(X)=f(X)+g(X)$.

Si se denotan como **Df** y **Dg** los dominios de las dos funciones respectivamente, el dominio o extensión de la función resultante de $f+g$ estará conformado por la **intersección** de los dominios de ambas funciones, es decir:

Dominio de $f+g=Df\cap Dg$.

3.5.2. Diferencia

La diferencia de dos funciones, "f" y "g" que se denota por "$f-g$", constituye la función definida por $(f-g)(X)=f(X)-g(X)$.

Si se denotan como **Df** y **Dg** los dominios de las dos funciones respectivamente, el dominio o extensión de la función resultante de $f-g$ estará conformado por la **intersección** de los dominios de ambas funciones, es decir:

Dominio de $f-g=Df\cap Dg$.

3.5.3. Producto

El producto de dos funciones, "f" y "g" que se denota por"$f\times g$", constituye la función definida por $(f\times g)(X)=f(X)\times g(X)$.

Si se denotan como **Df** y **Dg** los dominios de las dos funciones respectivamente, el dominio o extensión de la función resultante de $f\times g$ estará conformado por la **intersección** de los dominios de ambas funciones, es decir:

Dominio de $f\times g=Df\cap Dg$.

3.5.4. Cociente

El cociente de dos funciones, "f" y "g" que se denota por "f/g", constituye la función definida por $(f/g)(X)=f(X)/g(X)$.

Si se denotan como **Df** y **Dg** los dominios de las dos funciones respectivamente, el dominio o extensión de la función resultante de f/g estará conformado por la **intersección** de los dominios de ambas funciones, es decir:

Dominio de $f + g = Df \cap Dg$.

Donde se deberán excluir del dominio de la función $g(X)$ el o los valores reales para los cuales $g(X) = 0$

3.6. Propiedades de las operaciones con funciones

Propiedad distributiva.

$$f(X) \times [g(X) + h(X)] = [f(X) \times g(X)] + [f(X) \times h(X)]$$

Propiedad asociativa.

$$f(X) \times [g(X) \times h(X)] = [f(X) \times g(X)] \times h(X)$$

Propiedad conmutativa.

$$f(X) \times g(X) = g(X) \times f(X)$$

Elemento neutro.

La función constante $f(X) = 1$

Elemento nulo.

La función constante $f(X) = 0$

Elemento simétrico.

La función opuesta $-f(X)$

3.7. Tipos de restricciones en el análisis de un dominio

Durante el proceso de análisis del campo de existencia o dominio de una función, las posibles restricciones que puede presentar la expresión son como sigue:

1. Existencia de denominadores
2. Presencia de radicales (par)
3. Una combinación de los casos anteriores

ANÁLISIS POR CASO.
Sean a y b dos expresiones algebraicas se tendrá:

a).- Cociente de dos expresiones de la forma $\dfrac{a}{b}$

Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $b \neq 0$

b).- Radical par de una expresión de la forma $\sqrt{a}$

Restricción: el radicando no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real.

Análisis: $a \geq 0$

c).- Cociente de dos expresiones de la forma

$$\frac{\sqrt{a}}{b}$$

Restricción: el radicando del numerador no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $a \geq 0 \quad \text{y} \quad b \neq 0$

$$\frac{a}{\sqrt{b}}$$

Restricción: el radicando del denominador no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $b > 0$

e).- Cociente de dos expresiones de la forma

$$\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Restricción: el radicando $\dfrac{a}{b}$ no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $\dfrac{a}{b} \geq 0 \quad$ y $\quad b \neq 0$

En los siguientes ejercicios, hallar el campo operacional de las funciones definidas por:

$$(3.1) \qquad f(X) = \sqrt{X-1} \quad y \quad g(X) = \sqrt{X+5}$$

Analizando el dominio de $f(X)$:

$$f(X) = \sqrt{X-1}$$

Radical par de una expresión de la forma

$$\sqrt{a}$$

Restricción: el radicando no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real.

Análisis: $a \geq 0$

$$X - 1 \geq 0$$

$$X \geq 1$$

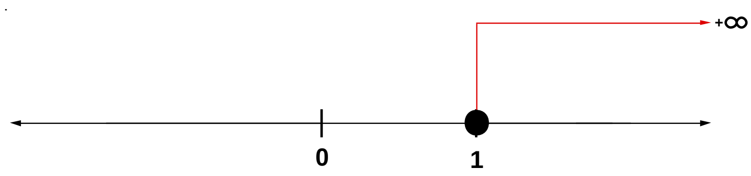


Figura 3.6

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = \{X/X \geq 1\}$$

Analizando el dominio de g(X):

$$g(X) = \sqrt{X+5}$$

Radical par de una expresión de la forma

$$\sqrt{a}$$

Restricción: el radicando no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real.

Análisis: $a \geq 0$

$$X + 5 \geq 0$$

$$X \geq -5$$

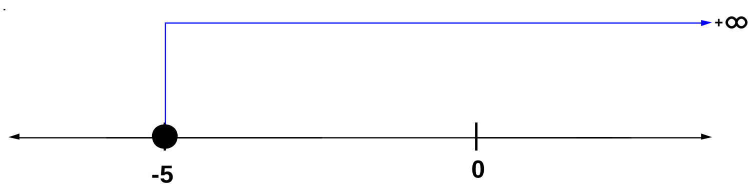


Figura 3.7

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = \{X/X \geq -5\}$$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

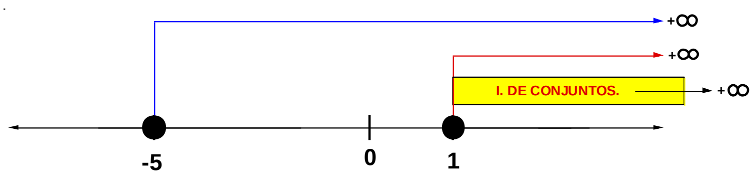


Figura 3.8

$$Df(X) \cap Dg(X) = \{X \geq 1\}$$

De lo antes expuesto se desprende:

$$f(X) + g(X) = f(X) - g(X) = f(X) \times g(X) = X \geq 1$$

En lo referente al cociente, se deberán excluir del dominio común aquellos valores reales para los cuales $g(X) = 0$, entonces:

$$g(X) = 0 \text{ para } X = -5$$

Pero $X = -5$ no forma parte del dominio común, de esta manera:

$$f(X)/g(X) = \{X \geq 1\}$$

(3.2) $f(X) = (X + 3)/(X - 4)$ y $g(X) = \sqrt{X - 2}$

Analizando el dominio de $f(X)$:

$$f(X) = (X + 3)/(X - 4)$$

Cociente de dos expresiones de la forma

$$\frac{a}{b}$$

Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $b \neq 0$

$$X - 4 \neq 0$$

$$X \neq 4$$

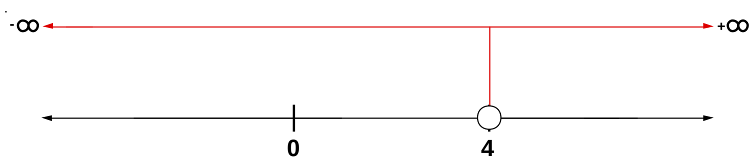


Figura 3.9

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = \{X/X \in R_2,\ excepto\ X = 4\}$$

Analizando el dominio de $g(X)$:

$$g(X) = \sqrt{X-2}$$

Radical par de una expresión de la forma $\sqrt{a}$

Restricción: el radicando no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real.

Análisis: $a \geq 0$

$$X - 2 \geq 0$$

$$X \geq 2$$

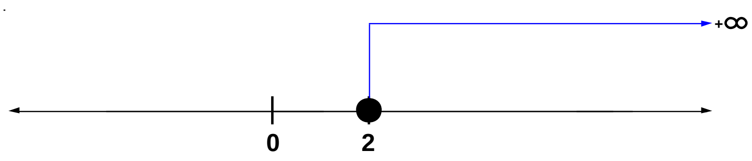


Figura 3.10

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = \{X/X \geq 2\}$$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

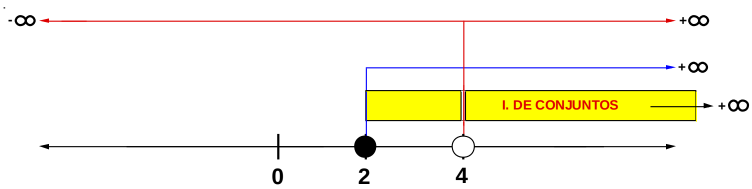


Figura 3.11

$$Df(X) \cap Dg(X) = \{X \geq 2,\ excepto\ X = 4\}$$

De lo antes expuesto se desprende:

$$f(X) + g(X) = f(X) - g(X) = f(X) \times g(X) = X \geq 2,\ excepto\ X = 4$$

En lo referente al cociente, se deberán excluir del dominio común aquellos valores reales para los cuales $g(X) = 0$, entonces:

$$g(X) = 0 \text{ para } X = 2$$

Como $X = 2$ forma parte del dominio común, entonces se tendrá:

$$f(X)/g(X) = \{X > 2, \; excepto \; X = 4\}$$

(3.3) $f(X) = \sqrt{X-5}/(X+1)$ y $g(X) = (X-6)/\sqrt{X+4}$

Analizando el dominio de $f(X)$:

$$f(X) = \sqrt{X-5}/(X+1)$$

Cociente de dos expresiones de la forma

$$\frac{\sqrt{a}}{b}$$

Restricción: el radicando del numerador no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $a \geq 0$ y $b \neq 0$

$$X - 5 \geq 0$$

$$X \geq 5$$

$$X + 1 \neq 0$$

$$X \neq -1$$

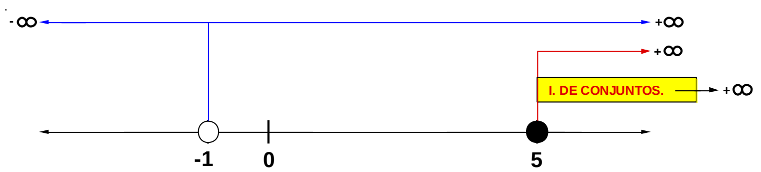


Figura 3.12

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = \{X/X \geq 5\}$$

Analizando el dominio de $g(X)$:

$$g(X) = (X-6)/\sqrt{X+4}$$

Cociente de dos expresiones de la forma

$$\frac{a}{\sqrt{b}}$$

Restricción: el radicando del denominador no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $b > 0$

$$X + 4 > 0$$

$$X > -4$$

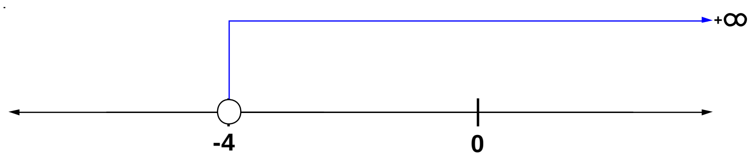


Figura 3.13

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = \{X/X > -4\}$$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

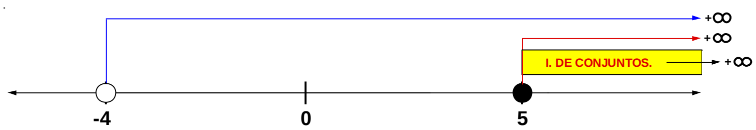


Figura 3.14

$$Df(X) \cap Dg(X) = \{X \geq 5\}$$

De lo antes expuesto se desprende:

$$f(X) + g(X) = f(X) - g(X) = f(X) \times g(X) = X \geq 5$$

En lo referente al cociente, se deberán excluir del dominio común aquellos valores reales para los cuales $g(X) = 0$, entonces:

$$g(X) = 0 \;\; para \;\; X = 6$$

Como $X = 6$ forma parte del dominio común, entonces se tendrá:

$$f(X)/g(X) = \{X \geq 5 \; excepto \; X = 6\}$$

(3.4) $\quad f(X) = \sqrt{\dfrac{(X+5)}{(X-3)}} \quad y \quad g(X) = \sqrt{\dfrac{(X-6)}{(X+1)}}$

Analizando el dominio de $f(X)$:

$$f(X) = \sqrt{\frac{(X+5)}{(X-3)}}$$

Cociente de dos expresiones de la forma

$$\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Restricción: el radicando $\frac{a}{b}$ no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $\frac{a}{b} \geq 0 \quad$ y $\quad b \neq 0$

$$\frac{X+5}{X-3} \geq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+}$

o

b) **y** $\frac{-}{-}$

Analizando la posibilidad a:

$$X + 5 \geq 0 \quad y \quad X - 3 > 0$$

$$X \geq -5 \quad y \quad X > 3$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

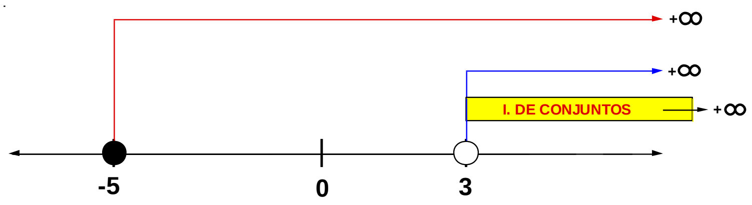


Figura 3.15

Solución a: $X > 3$

Analizando la posibilidad b:

$$X + 5 \leq 0 \;\; y \;\; X - 3 < 0$$

$$X \leq -5 \;\; y \;\; X < 3$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

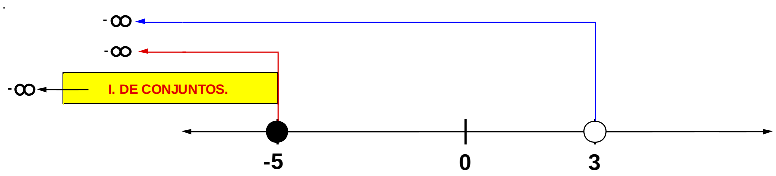


Figura 3.16

Solución b: $X \leq -5$
De esta manera la solución final será:

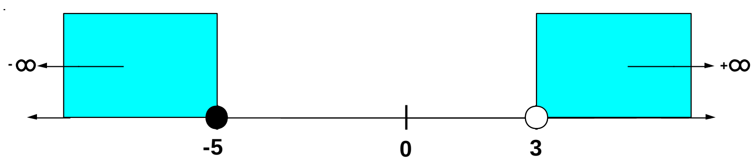


Figura 3.17

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = \{X/X \leq -5 \quad o \quad X > 3\}$$

Analizando el dominio de $g(X)$:

$$g(X) = \sqrt{\frac{(X-6)}{(X+1)}}$$

Cociente de dos expresiones de la forma :

$$\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Restricción: el radicando $\frac{a}{b}$ no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $\frac{a}{b} \leq 0 \quad y \quad b \neq 0$

$$\frac{X-6}{X+1} \geq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+}$

o

b) **y** $\frac{-}{-}$

Analizando la posibilidad a:

$$X - 6 \geq 0 \quad y \quad X + 1 > 0$$

$$X \geq 6 \quad y \quad X > -1$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

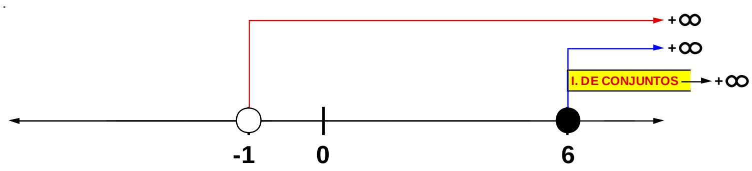


Figura 3.18

Solución a: $X \geq 6$
Analizando la posibilidad b:

$$X - 6 \leq 0 \quad y \quad X + 1 < 0$$

$$X \leq 6 \quad y \quad X < -1$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto

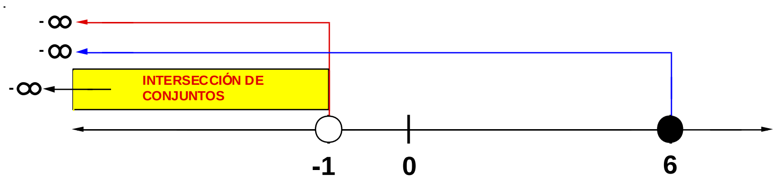


Figura 3.19

Solución b: $X < -1$
De esta manera la solución final será:

Figura 3.20

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = \{X/X < -1 \quad o \quad X \geq 6\}$$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

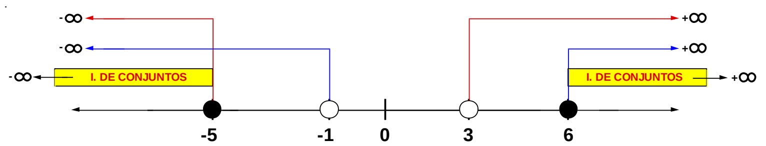


Figura 3.21

$$Df(X) \cap Dg(X) = \{X \leq -5 \quad y \quad X \geq 6\}$$

De lo antes expuesto se desprende:

$$f(X) + g(X) = f(X) - g(X) = f(X) \times g(X) = X \leq -5 \quad y \quad X \geq 6$$

En lo referente al cociente, se deberán excluir del dominio común aquellos valores reales para los cuales $g(X) = 0$, entonces:

$$g(X) = 0 \quad \text{para} \quad X = 6$$

Como X = 6 forma parte del dominio común, entonces se tendrá:

$$f(X)/g(X) = \{X \leq -5 \quad y \quad X > 6\}$$

(3.5) $\qquad f(x) = \sqrt{\dfrac{(x+5)}{(x^2 - X - 12)}} \quad y \quad g(x) = \sqrt{\dfrac{(x+2)}{(x^2 - 4)}}$

Analizando el dominio de $f(X)$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x+5)}{(x^2 - X - 12)}}$$

Cociente de dos expresiones de la forma

$$\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Restricción: el radicando $\frac{a}{b}$ no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $fracab \geq 0 \quad y \quad b \neq 0$

$$\frac{(x+5)}{(x^2-X-12)} \geq 0$$

Factoriando el denominador:

$$\frac{(x+5)}{(x-4)(x+3)} \geq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+}$

o

b) **y** $\frac{-}{-}$

Posibilidades específicas:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+\ y\ +}$ o b) **y** $\frac{+}{-\ y\ -}$ o c) **y** $\frac{-}{+\ y\ -}$ o d) **y** $\frac{-}{-\ y\ +}$

Analizando la posibilidad a:

$$X+5 \geq 0 \quad y \quad X-4>0 \quad y \quad X+3>0$$

Nótese que, en las expresiones del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

Resolviendo se tendrá:

$$X \geq -5 \quad y \quad X>4 \quad y \quad X>-3$$

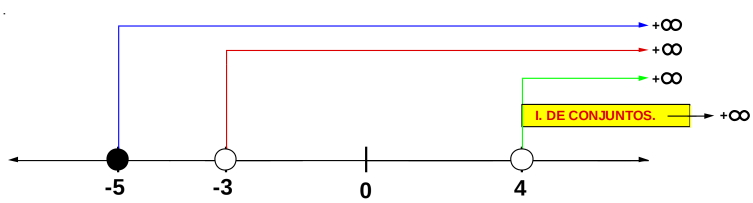


Figura 3.22

Solución a: $X > 4$
Analizando la posibilidad b:

$$X + 5 \geq 0 \quad y \quad X - 4 < 0 \quad y \quad X + 3 < 0$$

Nótese que, en las expresiones del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:
Resolviendo se tendrá:

$$X \geq -5 \quad y \quad X < 4 \quad y \quad X < -3$$

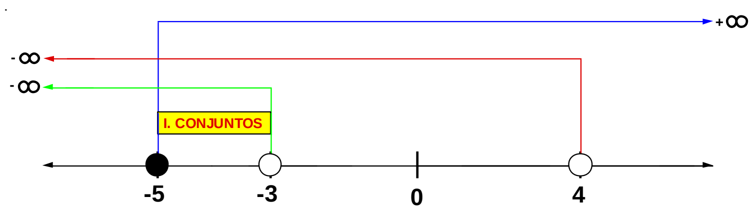


Figura 3.23

Solución b: $[-5 \leq X < -3)$
Analizando la posibilidad c:

$$X + 5 \leq 0 \quad y \quad X - 4 > 0 \quad y \quad X + 3 < 0$$

Nótese que, en las expresiones del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:
Resolviendo se tendrá:

$$X \leq -5 \quad y \quad X > 4 \quad y \quad X < -3$$

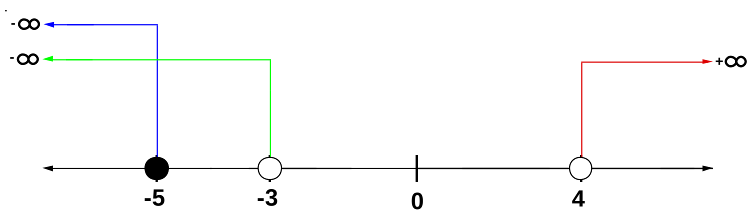


Figura 3.24

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:

Solución c: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
Analizando la posibilidad d:

$$X + 5 \leq 0 \quad y \quad X - 4 < 0 \quad y \quad X + 3 > 0$$

Nótese que, en las expresiones del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:
Resolviendo se tendrá:

$$X \leq -5 \quad y \quad X < 4 \quad y \quad X > -3$$

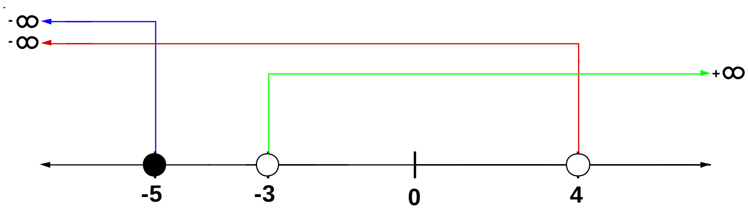


Figura 3.25

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución d: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
De esta manera la solución final será:

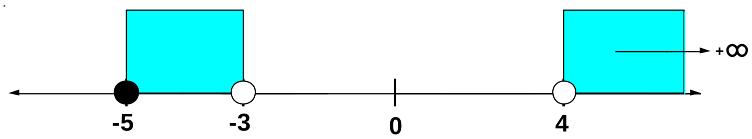


Figura 3.26

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = \{X/[-5 \leq X < -3) \quad o \quad X > 4\}$$

Analizando el dominio de g(X):

$$g(X) = \sqrt{\frac{(X+2)}{(X^2-4)}}$$

Cociente de dos expresiones de la forma

$$\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Restricción: el radicando $\dfrac{a}{b}$ no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $\frac{a}{b} \geq 0 \quad y \quad b \neq 0$

$$\frac{X+2}{X^2-4} \geq 0$$

Factorando el denominador:

$$\frac{X+2}{(X+2)(X-2)} \geq 0$$

Simplificando:

$$\frac{1}{(X-2)} \geq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\dfrac{+}{+}$

o

b) **y** $\dfrac{-}{-}$

Ahora, si se observa el numerador de la expresión resultante, podrá apreciarse que el mismo es una constante positiva, por lo que la segunda opción no es aceptable, de esta manera la única alternativa será que el denominador sea positivo y diferente de cero, por lo tanto:

$$X-2>0$$

$$X>2 \quad y \quad X \neq 2 \quad y \quad X \neq -2$$

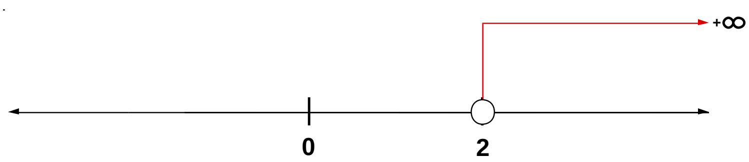


Figura 3.27

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = \{X/X > 2\}$$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

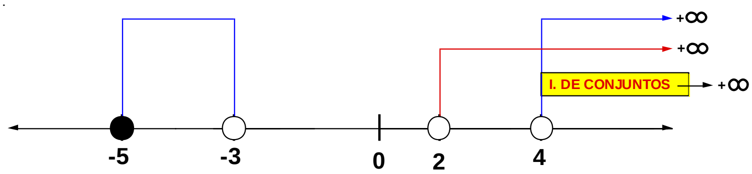


Figura 3.28

$$Df(X) \cap Dg(X) = X > 4$$

De lo antes expuesto se desprende:

$$f(X) + g(X) = f(X) - g(X) = f(X) \times g(X) = X > 4$$

En lo referente al cociente, se deberán excluir del dominio común aquellos valores reales para los cuales $g(X) = 0$, o la vuelven indeterminada entonces:

$g(X) = 0$ no existen

$$g(X) \Longrightarrow indeterminada X = 2 \quad y \quad X = -2$$

Como $X = 2$ y $X = -2$ no forman parte del dominio común, entonces se tendrá:

$$f(X)/g(X) = \{X > 4\}$$

(3.6) $\qquad f(X) = \sqrt{\dfrac{1}{(X^3 - 9x)}} \qquad g(X) = \sqrt{\dfrac{3X}{(X^2 - 16)}}$

Analizando el dominio de $f(X)$:

$$f(X) = \sqrt{\frac{1}{(X^3 - 9x)}}$$

Cociente de dos expresiones de la forma:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Restricción: el radicando $\frac{a}{b}$ no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $\frac{a}{b} \geq 0 \quad y \quad b \neq 0$

$$\frac{1}{(X^3 - 9X)} \geq 0$$

Factorando el denominador:

$$\frac{1}{X(X^2 - 9)} \geq 0$$

En donde:

$$\frac{1}{(X + 3)(X - 3)} \geq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+}$

o

b) **y** $\frac{-}{-}$

Ahora, si se observa el numerador de la expresión resultante, podrá apreciarse que el mismo es una constante positiva, por lo que la segunda opción no es aceptable, de esta manera la única alternativa será que el denominador sea positivo y diferente de cero, por lo tanto:

$$X(X + 3)(X - 3) > 0$$

Con lo cual se tendrá ahora el siguiente análisis:

Posibilidades

a) + **y** + **y** +

o

b) + **y** **-** **y** **-**

o

c) **-** **y** + **y** **-**

o

d) **-** **y** **-** **y** +

Analizando la posibilidad a:

$$X > 0 \ y \ X + 3 > 0 \ y \ X - 3 > 0$$

Nótese que, en las expresiones del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

Resolviendo se tendrá:

$$X > 0 \ y \ X > -3 \ y \ X > 3$$

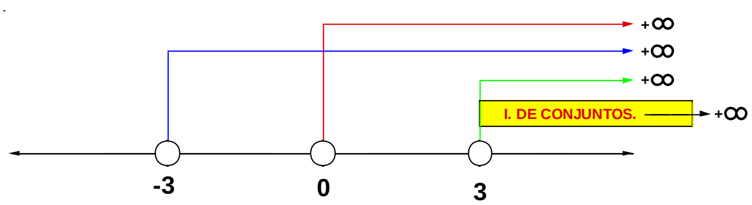


Figura 3.29

Solución a: $X > 3$

Analizando la posibilidad b:

$$X > 0 \quad y \quad X + 3 < 0 \quad y \quad X - 3 < 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X > 0 \quad y \quad X < -3 \quad y \quad X < 3$$

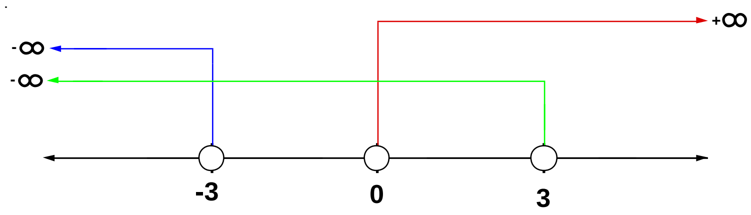


Figura 3.30

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución b: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
Analizando la posibilidad c:

$$X < 0 \quad y \quad X + 3 > 0 \quad y \quad X - 3 < 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X < 0 \quad y \quad X > -3 \quad y \quad X < 3$$

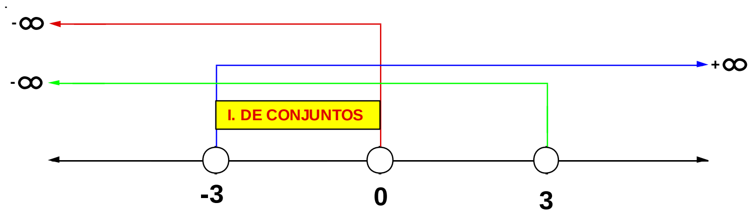


Figura 3.31

Solución c: $(-3 < X < 0)$
Analizando la posibilidad d:

$$X < 0 \quad y \quad X + 3 < 0 \quad y \quad X - 3 > 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X < 0 \quad y \quad X < -3 \quad y \quad X > 3$$

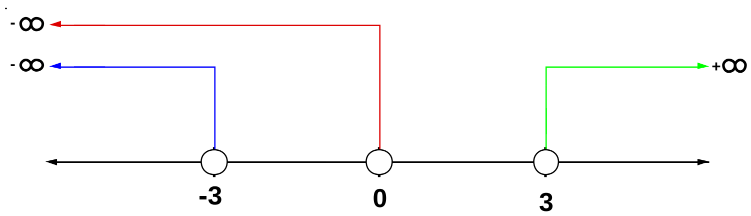


Figura 3.32

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución d: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
De esta manera la solución final será:

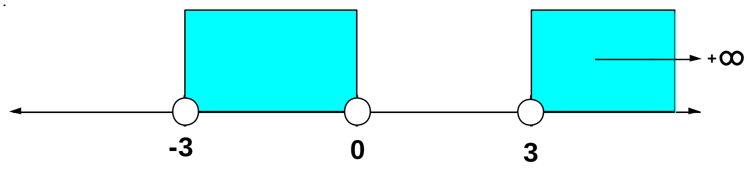


Figura 3.33

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = \{X/(-3 < X < 0) \quad o \quad X > 3\}$$

Obsérvese que, los valores que vuelven indeterminada a la función, no constan en el campo de existencia o dominio de la misma, es decir $X = 0$,$X = -3$, y $X = 3$

Analizando el dominio de $g(X)$:

$$g(X) = \sqrt{\frac{3X}{(X^2 - 16)}}$$

Cociente de dos expresiones de la forma $\sqrt{\frac{a}{b}}$

Restricción: el radicando $\frac{a}{b}$ no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis $\frac{a}{b} \geq 0 \qquad$ y $\qquad b \neq 0$

$$\frac{3X}{(X^2 - 16)} \geq 0$$

Factorando el denominador:

$$\frac{3X}{(X + 4)(X - 4)} \geq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+}$

o

b) **y** $\frac{-}{-}$

Posibilidades específicas:

Posibilidades

a) y $\dfrac{+}{+\ y\ +}$ o b) y $\dfrac{+}{-\ y\ -}$ o c) y $\dfrac{-}{+\ y\ -}$ o d) y $\dfrac{-}{-\ y\ +}$

Analizando la posibilidad a:

$$3X \geq 0 \quad y \quad X + 4 > 0 \quad y \quad X - 4 > 0$$

Nótese que, en las expresiones del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto: Resolviendo se tendrá:

$$X \geq 0 \quad y \quad X > -4 \quad y \quad X > 4$$

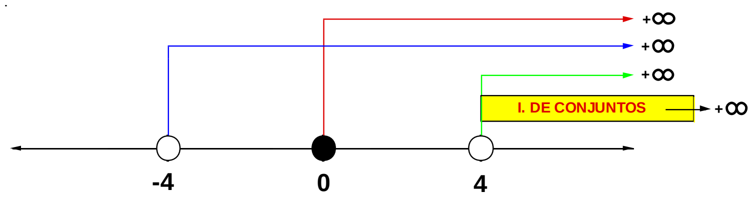


Figura 3.34

Solución a: $X > 4$
Analizando la posibilidad b:

$$3X \geq 0 \quad y \quad X + 4 < 0 \quad y \quad X - 4 < 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X \geq 0 \quad y \quad X < -4 \quad y \quad X < 4$$

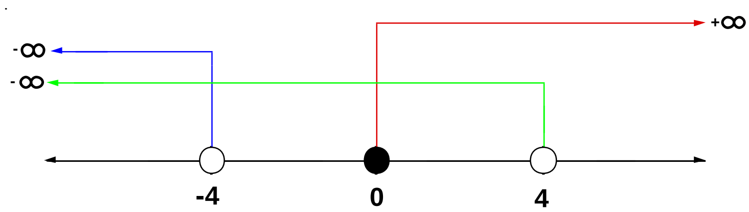


Figura 3.35

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución b: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
Analizando la posibilidad c:

$$3X \leq 0 \quad y \quad X + 4 > 0 \quad y \quad X - 4 < 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X \leq 0 \quad y \quad X > -4 \quad y \quad X < 4$$

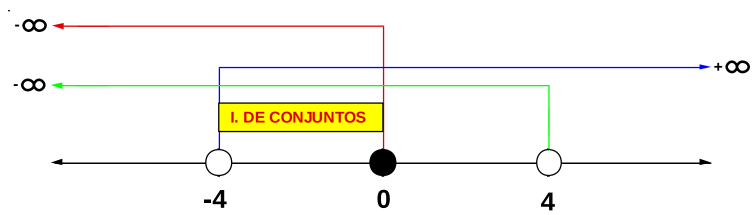


Figura 3.36

Solución c: $(-4 < X \leq 0]$
Analizando la posibilidad d:

$$3X \leq 0 \quad y \quad X + 4 < 0 \quad y \quad X - 4 > 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X \leq 0 \quad y \quad X < -4 \quad y \quad X > 4$$

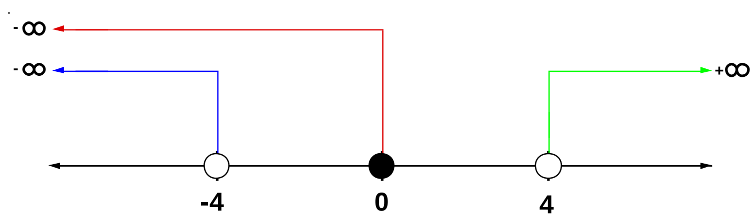


Figura 3.37

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución d:$\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
De esta manera la solución final será:

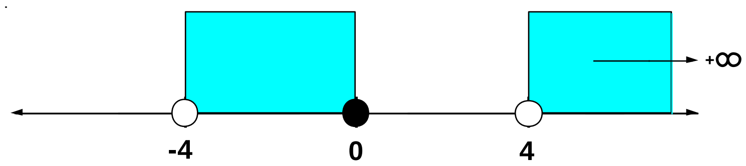


Figura 3.38

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = \{X/(-4 < X \leq 0] \ o \ X > 4\}$$

Obsérvese que, los valores que vuelven indeterminada a la función, no constan en el campo de existencia o dominio de la misma, es decir $X = -4$, y $X = 4$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

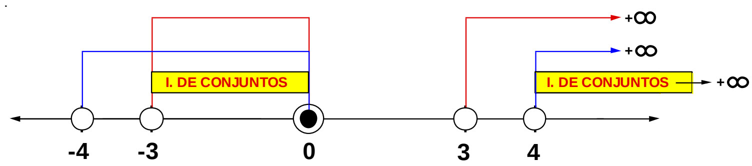


Figura 3.39

$$Df(X) \cap Dg(X) = \{X/(-3 < X < 0) \quad y \quad X > 4\}$$

De lo antes expuesto se desprende:

$$f(X)+g(X) = f(X)-g(X) = f(X)\times g(X) = \{(-3 < X < 0) \quad y \quad X > 4\}$$

En lo referente al cociente, se deberán excluir del dominio común aquellos valores reales para los cuales $g(X) = 0$, entonces:

$$g(X) = 0 \quad para \quad X = 0$$

Como X $= 0$ no forma parte del dominio común, entonces se tendrá:

$$f(X)/g(X) = \{(-3 < X < 0) \quad y \quad X > 4\}$$

(3.7) $f(X) = \sqrt{(4X^2)/(X^2-4)}$ y $g(X) = X^2/\sqrt{(X^2-X-12)}$

Analizando el dominio de $f(X)$:

$$f(X) = \sqrt{(4X^2)/(X^2-4)}$$

Re expresando la función f(X) se tiene:

$$f(X) = \sqrt{4X^2}/\sqrt{(X^2-4)}$$

De esta manera:

$$f(X) = 2X/\sqrt{(X^2-4)}$$

Cociente de dos expresiones de la forma

$$\frac{a}{\sqrt{b}}$$

Restricción: el radicando del denominador no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $b > 0$

$$X^2 - 4 > 0$$

Factorando el denominador:

$$(X+2)(X-2) > 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+}$

o

b) **y** $\frac{-}{-}$

Analizando la posibilidad a:

$$X + 2 > 0 \quad y \quad X - 2 > 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X > -2 \quad y \quad X > 2$$

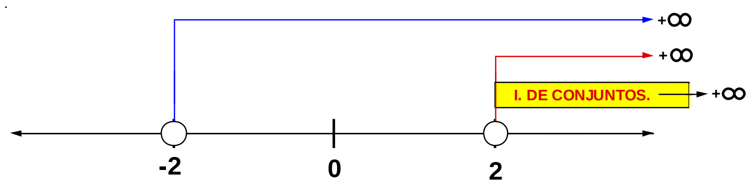


Figura 3.40

Solución a: $X > 2$
Analizando la posibilidad b:

$$X + 2 < 0 \quad y \quad X - 2 < 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X < -2 \quad y \quad X < 2$$

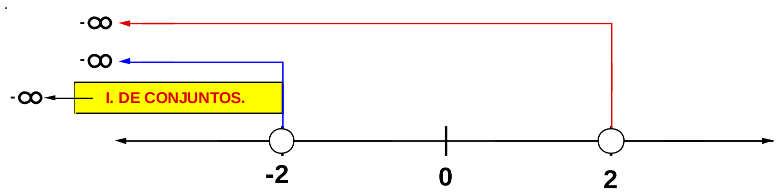


Figura 3.41

Solución b: $X < -2$
De esta manera la solución final será:

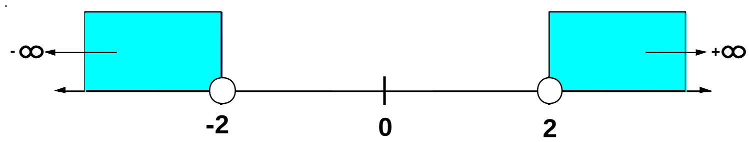


Figura 3.42

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = \{X/X < -2 \quad o \quad X > 2\}$$

Obsérvese que, los valores que vuelven indeterminada a la función, no constan en el campo de existencia o dominio de la misma, es decir $X = -2$, y $X = 2$

Analizando el dominio de $g(X)$:

$$g(X) = X^2/\sqrt{(X^2 - X - 12)}$$

Cociente de dos expresiones de la forma $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$

Restricción: el radicando del denominador no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $b > 0$

$$X^2 - X - 12 > 0$$

Factorando el denominador:

$$(X - 4)(X + 3) > 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\dfrac{+}{+}$

o

b) **y** $\dfrac{-}{-}$

Analizando la posibilidad a:

$$X - 4 > 0 \quad y \quad X + 3 > 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X > 4 \quad y \quad X > -3$$

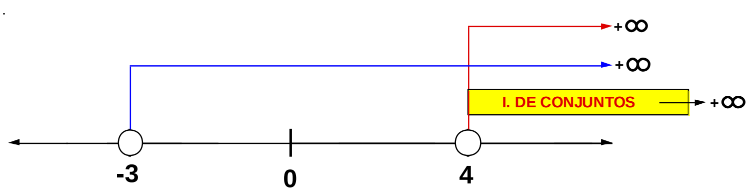


Figura 3.43

Solución a: $X > 4$
Analizando la posibilidad b:

$$X - 4 < 0 \quad y \quad X + 3 < 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X < 4 \quad y \quad X < -3$$

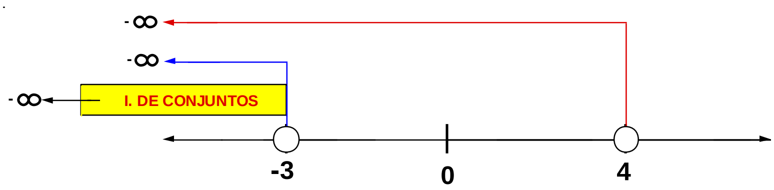


Figura 3.44

Solución b: $X < -3$
De esta manera la solución final será:

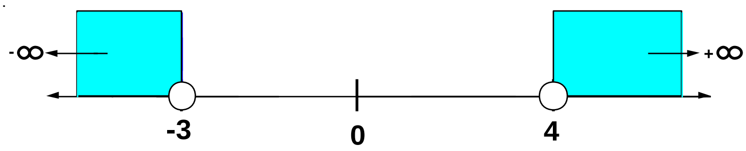


Figura 3.45

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = \{X/X < -3 \quad o \quad X > 4\}$$

Obsérvese que los valores que vuelven indeterminada a la función, no constan en el campo de existencia o dominio de la misma, es decir $X = -3$, y $X = 4$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

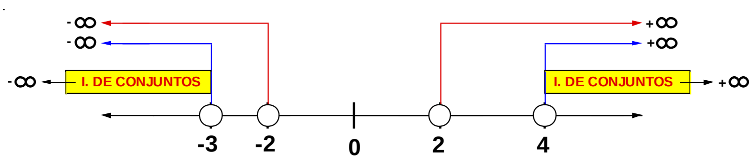


Figura 3.46

$$Df(X) \cap Dg(X) = \{X/X < -3 \quad y \quad X > 4\}$$

De lo antes expuesto se desprende:

$$f(X) + g(X) = f(X) - g(X) = f(X) \times g(X) = \{X < -3 \quad y \quad X > 4\}$$

En lo referente al cociente, se deberán excluir del dominio común aquellos valores reales para los cuales $g(X) = 0$, entonces:

$$g(X) = 0 \quad para \quad X = 0$$

Como $X = 0$ no forma parte del dominio común, entonces se tendrá:

$$f(X)/g(X) = \{X < -3 \quad y \quad X > 4\}$$

(3.8) $f(X) = \sqrt{2X^2 + 7X - 15}/X - 2 \;\; y \;\; g(X) = X - 8/\sqrt{X^2 + 2X - 3}$

Analizando el dominio de $f(X)$:

$$f(X) = \sqrt{2X^2 + 7X - 15}/X - 2$$

Cociente de dos expresiones de la forma $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

Restricción: el radicando del numerador no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $a \geq 0$ y $b \neq 0$

$$2X^2 + 7X - 15 \geq 0$$

Factorando:

$$(2X - 3)(X + 5) \geq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\dfrac{+}{+}$

o

b) **y** $\dfrac{-}{-}$

Analizando la posibilidad a:

$$2X - 3 \geq 0 \quad y \quad X + 5 \geq 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X \geq 3/2 \quad y \quad X \geq -5$$

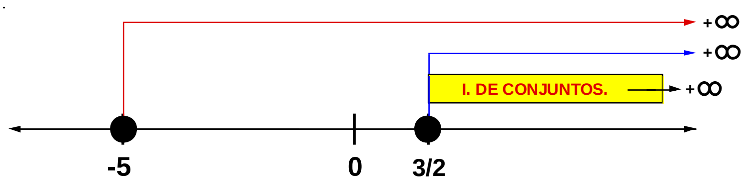


Figura 3.47

Solución a: $X \geq \dfrac{3}{2}$
Analizando la posibilidad b:

$$2X - 3 \leq 0 \quad y \quad X + 5 \leq 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X \leq \frac{3}{2} \quad y \quad X \leq -5$$

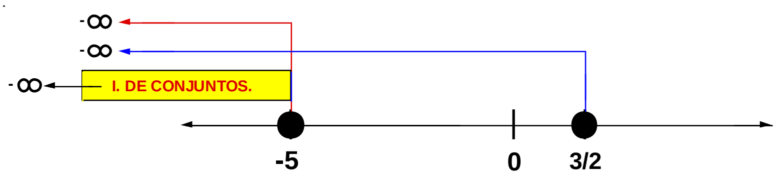


Figura 3.48

Solución b: $X \leq -5$
De esta manera la solución final será:

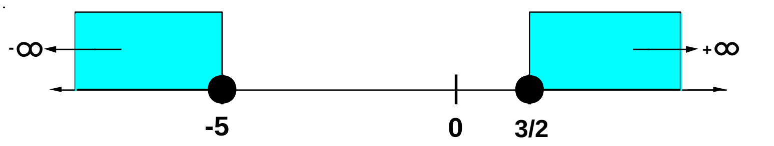


Figura 3.49

Ahora analizando el denominador se tiene:

$$X - 2 \neq 0$$

De donde

$$X \neq 2$$

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = X/X \leq -5 \;\; o \;\; X \geq \frac{3}{2} \;\; excepto \;\; X \neq 2$$

Figura 3.50

Analizando el dominio de $g(X)$:

$$g(X) = X - 8/\sqrt{X^2 + 2X - 3}$$

Cociente de dos expresiones de la forma $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$

Restricción: el radicando del denominador no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $b > 0$

$$X^2 + 2X - 3 > 0$$

Factorando el denominador:

$$(X + 3)(X - 1) > 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\dfrac{+}{+}$

o

b) **y** $\dfrac{-}{-}$

Analizando la posibilidad a:

$$X + 3 > 0 \quad y \quad X - 1 > 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X > -3 \quad y \quad X > 1$$

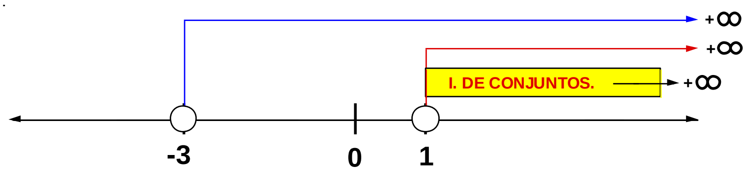


Figura 3.51

Solución a: $X > 1$
Analizando la posibilidad b:

$$X + 3 < 0 \quad y \quad X - 1 < 0$$

Resolviendo se tendrá:

$$X < -3 \quad y \quad X < 1$$

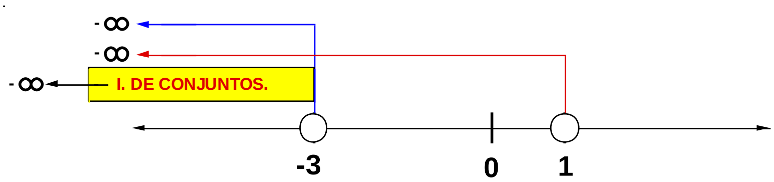


Figura 3.52

Solución b: $X < -3$
De esta manera la solución final será:

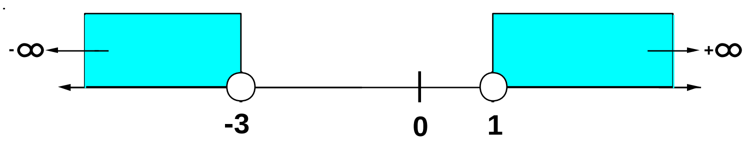


Figura 3.53

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = \{X/X < -3 \quad o \quad X > 1\}$$

Obsérvese que los valores que vuelven indeterminada a la función, no constan en el campo de existencia o dominio de la misma, es decir $X = -3$, y $X = 1$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

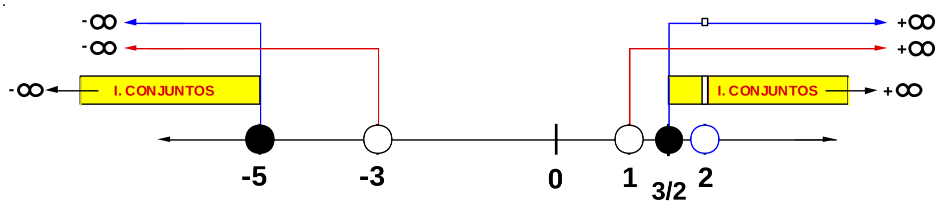


Figura 3.54

$$Df(X) \cap Dg(X) = \{X/X < -5 \quad y \quad X > \frac{3}{2} \; excepto \; X = 2\}$$

De lo antes expuesto se desprende:

$$f(X)+g(X) = f(X)-g(X) = f(X)\times g(X) = X < -5 \quad y \quad X > \frac{3}{2} \; excepto \; X = 2$$

En lo referente al cociente, se deberán excluir del dominio común aquellos valores reales para los cuales $g(X) = 0$, entonces:

$$g(X) = 0 \quad para \quad X = 8$$

Como $X = 8$ forma parte del dominio común, entonces se tendrá:

$$f(X)/g(X) = \{X < -5 \quad y \quad X > \frac{3}{2} \quad excepto \quad X = 2 \quad y \quad X = 8\}$$

4 Análisis de Funciones Especiales

4.1. Función compuesta de “X”

4.1.1. Definición

Una función compuesta, se la puede definir como aquella que está constituida por dos o más “**sub-funciones**” de “**X**”, cada uno de estos elementos constitutivos de la función principal a su vez, está acompañado de un determinado “**condicionante o condicionamiento**” de tal manera que al concluir el análisis, cada una de las “**sub-funciones**” aportará a la generación de una función en R_2, por ejemplo:

Dada la función compuesta definida por

$$f(X) = \begin{cases} X & si \quad X \geq 0 \\ -X & si \quad X < 0 \end{cases}$$

$$f(X) = \begin{cases} X & si \quad X \geq 0 \\ -X & si \quad X < 0 \end{cases}$$

$$f(X) \Longrightarrow Funci\acute{o}n\ compuesta\ de\ X$$

$$X\ y - X \Longrightarrow Sub - funciones\ de\ X$$

$$X \geq 0 \quad y \quad X < 0 \Longrightarrow Condicionantes\ de\ las\ Sub - funciones$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

Determinar el dominio (conjunto de valores admisibles para la variable independiente “X”), rango (conjunto de valores de salida o valores de la variable dependiente “Y”) y trazar la gráfica para las funciones definidas por:

$$f(X) = \begin{cases} X+2 & si \quad X \geq 2 \\ X-4 & si \quad X < 2 \end{cases} \tag{4.1}$$

Sub-funciones:	**Ecuaciones:**
1. $f_1(X) = X + 2$	1. $Y = X + 2$
2.$f_2(X) = 4X - 4$	2. $Y = 4X - 4$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = X + 2$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -A/B = 1$, ángulo de inclinación 45 grados.
Ecuación ordenada: $X - Y + 2 = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 2 \Longrightarrow P_1(0, 2)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -2 \Longrightarrow P_2(-2, 0)$$

2. $Y = 4X - 4$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -A/B = 4$.
Ecuación ordenada: $4X - Y - 4 = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -4 \Longrightarrow P_1(0, -4)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 1 \Longrightarrow P_2(1, 0)$$

Análisis de condicionantes: no se requiere.
Gráfica simultanea de ecuaciones:

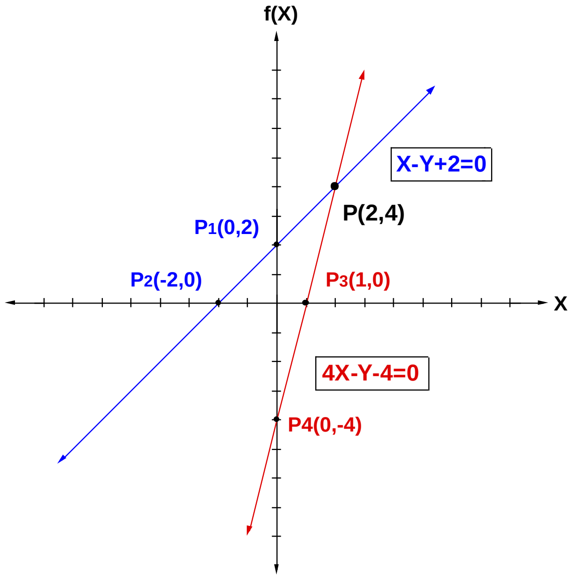


Figura 4.1

Generando la función $f(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

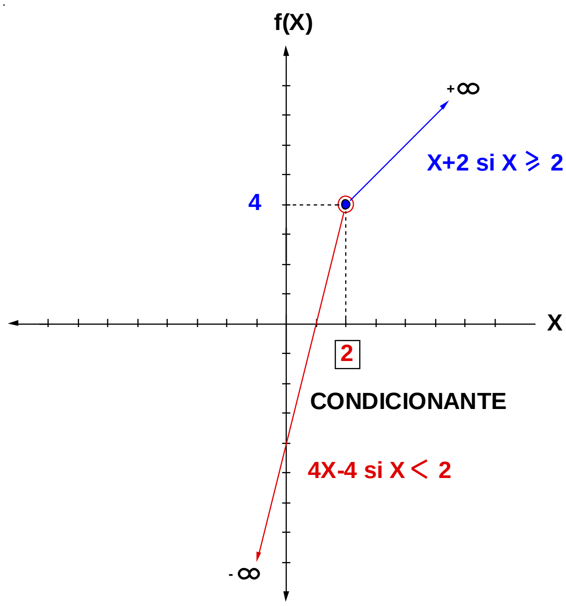


Figura 4.2

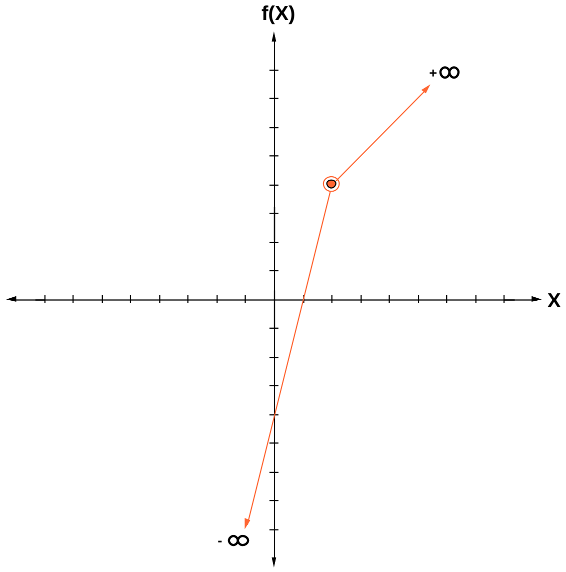


Figura 4.3: Gráfica de la funcion $f(X)$

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de $f(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Rf(X) = Y/Y \in R_2$$

$$x = \begin{cases} -4 \quad si \quad X < -2 \\ 2 \quad si \quad -2 \leq X \leq 4 \\ 6 \quad si \quad X > 4 \end{cases} \tag{4.2}$$

Sub-funciones:
1. $h_1(X) = -4$
2. $h_2(X) = 2$
3. $h_3(X) = 6$

Ecuaciones:
1. $Y = -4$
2. $Y = 2$
3. $Y = 6$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = -4$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

2. $Y = 2$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

3. $Y = 6$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.
Análisis de condicionantes: no se requiere.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

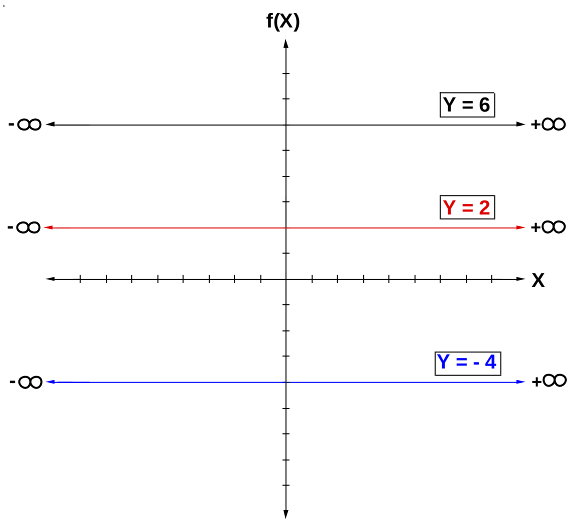


Figura 4.4

Generando la función $h(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

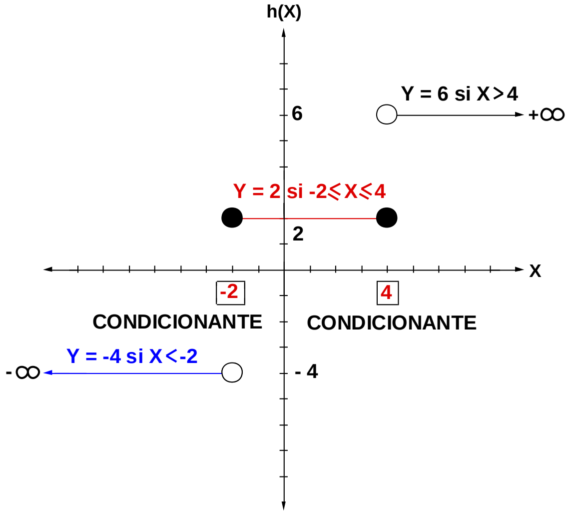


Figura 4.5

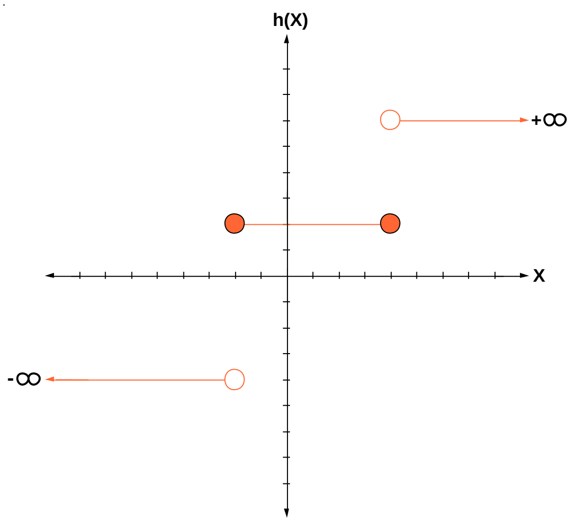


Figura 4.6: Gráfica de la funcion $h(X)$

Dominio o campo de existencia de $h(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Dh(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de $h(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que $Y = 6$, $Y = 2$, $Y = -4$

$$Rh(X) = \{Y/Y = 6, Y = 2, Y = -4\}$$

$$x = \begin{cases} 2X - 4 & si \quad X \geq 4 \\ 1 & si \quad 1 < X < 4 \\ 3X - 2 & si \quad X \leq 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

Sub-funciones:	**Ecuaciones:**
1. $g_1(X) = 2X - 4$	1. $Y = 2X - 4$
2. $g_2(X) = 1$	2. $Y = 1$
3. $g_3(X) = 3X - 2$	3. $Y = 3X - 2$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = 2X - 4$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -A/B = 2$
Ecuación ordenada: $2X - Y - 4 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -4 \Longrightarrow P_1(0, -4)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 2 \Longrightarrow P_2(2, 0)$$

2. $Y = 1$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

3. $Y = 3X - 2$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -A/B = 3$
Ecuación ordenada: $3X - Y - 2 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -4 \Longrightarrow P_1(0, -4)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ \ X = \frac{2}{3} \Longrightarrow P_2(\frac{2}{3}, 0)$$

Análisis de condicionantes: no se requiere

Gráfica simultanea de ecuaciones:

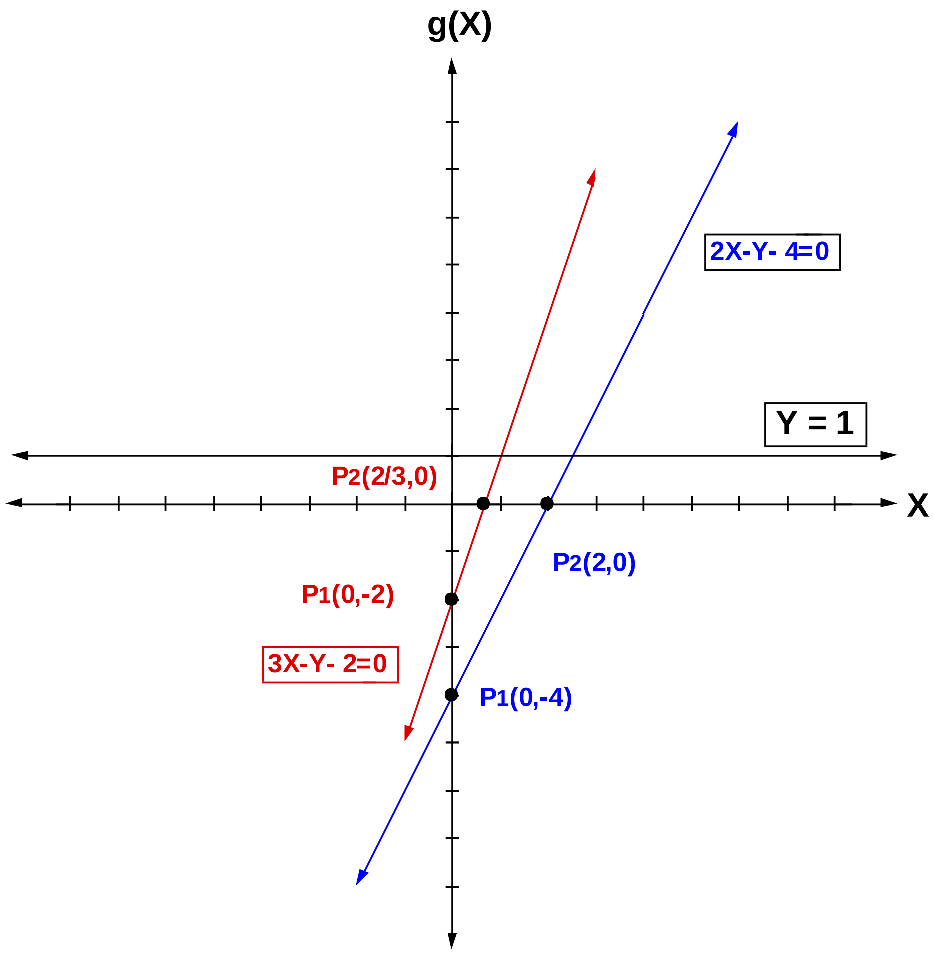


Figura 4.7

Generando la función $h(X)$:

En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

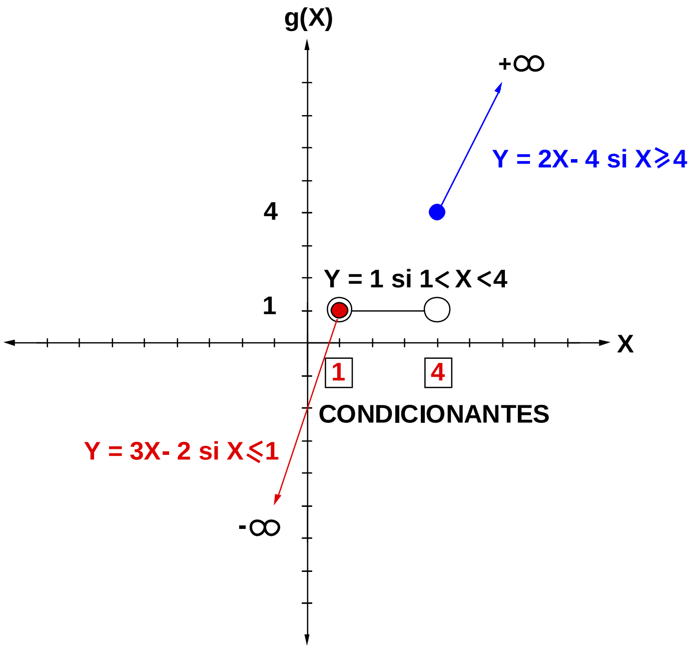


Figura 4.8

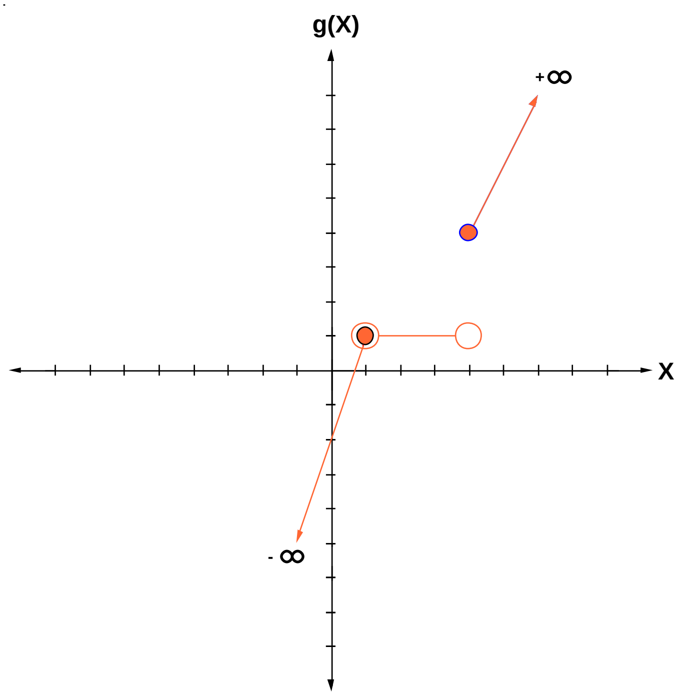


Figura 4.9: Gráfica de la función $g(X)$

Dominio o campo de existencia de $g(X)$:
Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Dg(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de $g(X)$:
Conjunto de valores de Y tal que $Y > 4 \quad e \quad Y \leq 1$

$$Rg(X) = \{Y/Y > 4 \quad e \quad Y \leq 1\}$$

(4.4)
$$x = \begin{cases} (30-5X)/6 \quad si \quad X < 3 \\ 1 \quad si \quad X = 3 \\ X - 6 \quad si \quad X > 3 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $f_1(X) = (30-5X)/6$	1. $Y = (30-5X)/6$
2. $f_2(X) = 1$	2. $Y = 1$
3. $f_3(X) = X - 6$	3. $Y = X - 6$

Análisis de ecuaciones:

1. $\quad Y = 30 - 5X/6$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -A/B = -\frac{5}{6}$
Ecuación ordenada: $5X + 6Y - 30 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 5 \Longrightarrow P_1(0,5)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 6 \Longrightarrow P_2(6,0)$$

2. $\quad Y = 1$
Si $X = 3$, representa un punto cuyas coordenadas son $P(3,1)$

3. $Y = X - 6$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -A/B = 1$
Ecuación ordenada: $X - Y - 6 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 6 \Longrightarrow P_1(0,6)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -6 \Longrightarrow P_2(-6,0)$$

Análisis de condicionantes: no se requiere.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

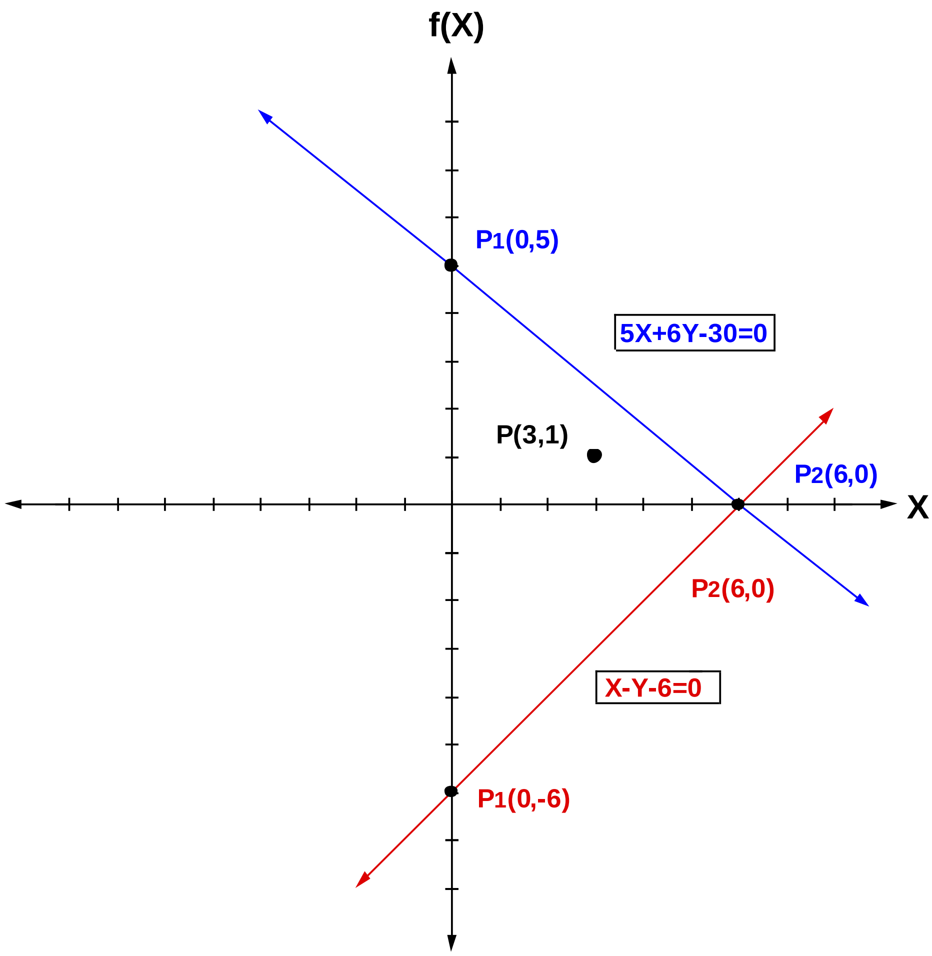


Figura 4.10

Generando la función $f(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

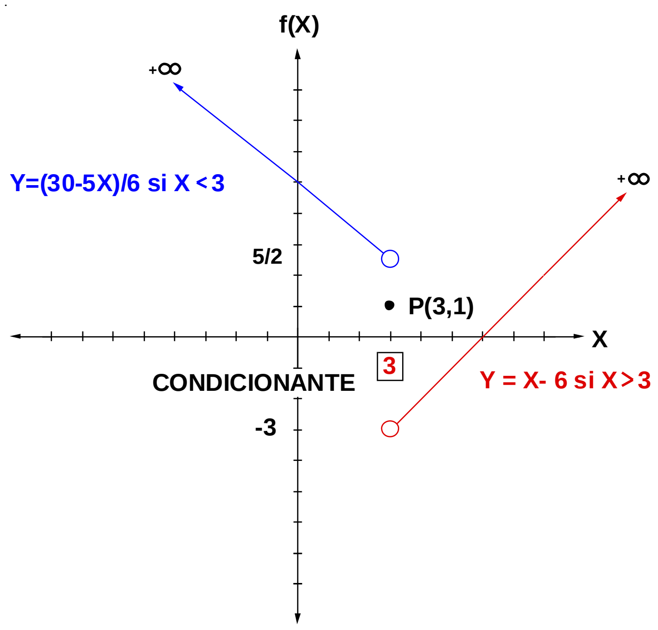


Figura 4.11

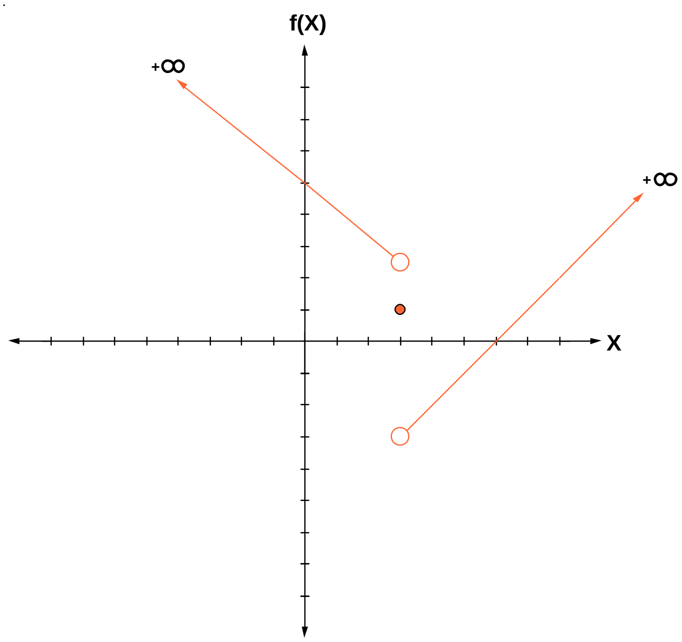


Figura 4.12: Gráfica de la función $f(X)$

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:
Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de $f(X)$:
Conjunto de valores de Y tal que $Y > -3$

$$Rf(X) = \{Y/Y > -3\}$$

(4.5) $$x = \begin{cases} X+2 & si \quad X \geq 2 \\ X^2 & si \quad X < 2 \end{cases}$$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = X + 2$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/_{B} = 1$
Ecuación ordenada: $X - Y + 2 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 2 \Longrightarrow P_1(0,2)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -2 \Longrightarrow P_2(-2,0)$$

2. $Y = X^2$
Grado de la ecuación: **segundo grado**.
Representa: una curva en R_2.
Tipo de curva: Parábola cuya ecuación está en la forma canónica

$$X^2 = 4PY$$

Características de la curva:
$V = (0,0)$, eje coincidente con el eje Y, $P = {}^{1}\!/_{4}$ como $P > 0$ los ramales se orientan hacia arriba, longitud del lado recto $LR = |4P| = |4{}^{1}\!/_{4}| = 1$
Ecuación ordenada: $X^2 - Y = 0$
Análisis de condicionantes: no se requiere.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

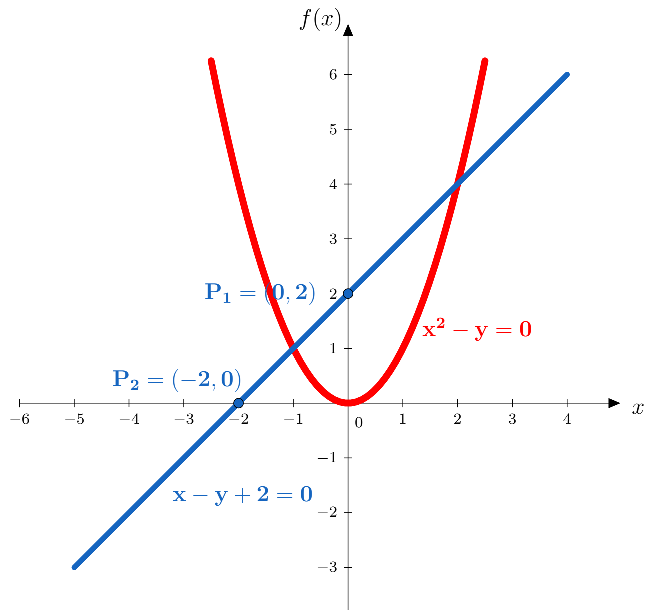


Figura 4.13

Generando la función $f(X)$**:**

En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

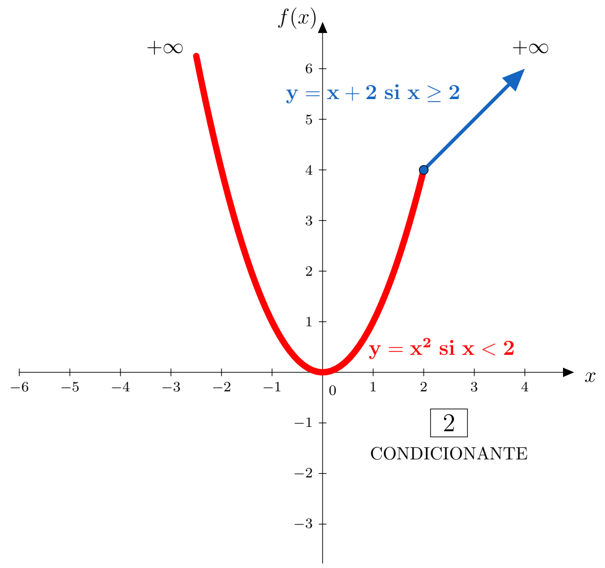


Figura 4.14

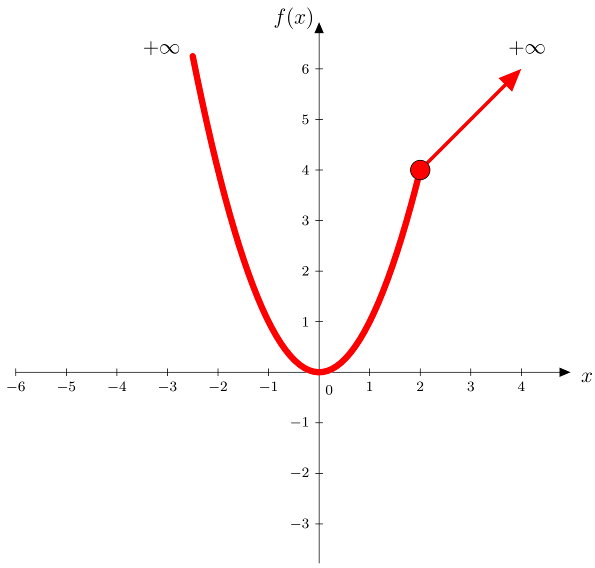


Figura 4.15

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = X/X \in R_2$$

Rango o ámbito de $f(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que $Y \geq 0$

$$Rf(X) = Y/Y \geq 0$$

(4.6)
$$x = \begin{cases} \dfrac{(21-10X)}{7} & si \quad < 0 \\ 3 \quad si \quad 0 < X < 3 \\ X \quad si \quad X > 3 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $g_1(X) = \dfrac{(21-10X)}{7}$	1. $Y = \dfrac{(21-10X)}{7}$
2. $g_2(X) = 3$	2. $Y = 3$
3. $g_3(X) = X$	3. $Y = X$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = \dfrac{(21 - 10X)}{7}$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/\!_{B} = -{}^{10}\!/\!_{7}$

Ecuación ordenada: $10X + 7Y - 21 = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 3 \Longrightarrow P_1(0, 3)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -6 \Longrightarrow P_2({}^{21}\!/\!_{10}, 0)$$

2. $Y = 3$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

3. $Y = X$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Pendiente de la recta:$m = -{}^{A}\!/\!_{B} = 1$ ángulo de inclinación 45 grados.

Ecuación ordenada: $X - Y = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 0 \Longrightarrow P_1(0, 0)$$

$$b)\ Con\ Y = 3;\ X = 3 \Longrightarrow P_2(3, 3)$$

Análisis de condicionantes: no se requiere.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

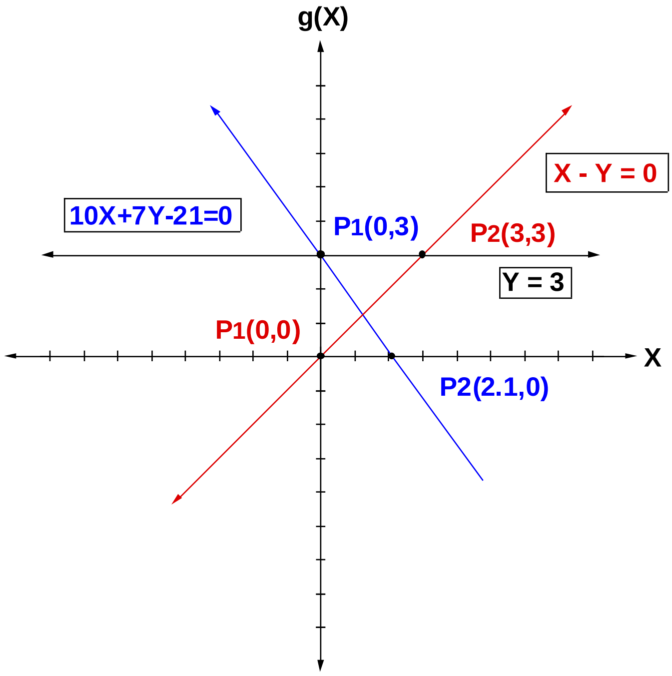


Figura 4.16

Generando la función $g(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

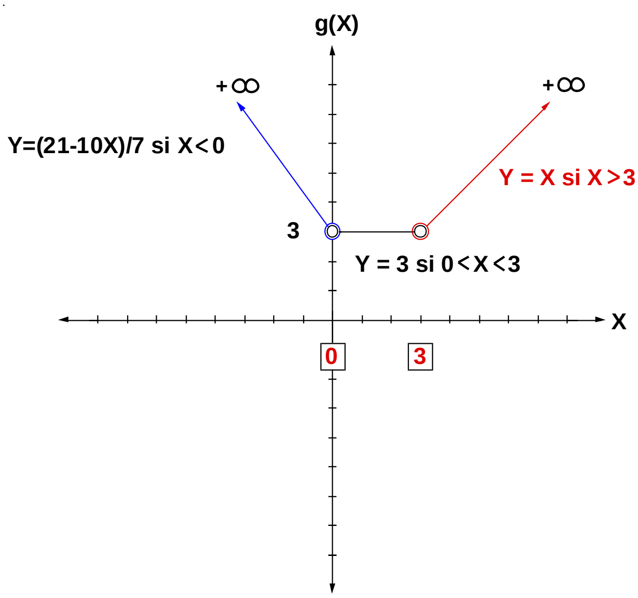


Figura 4.17

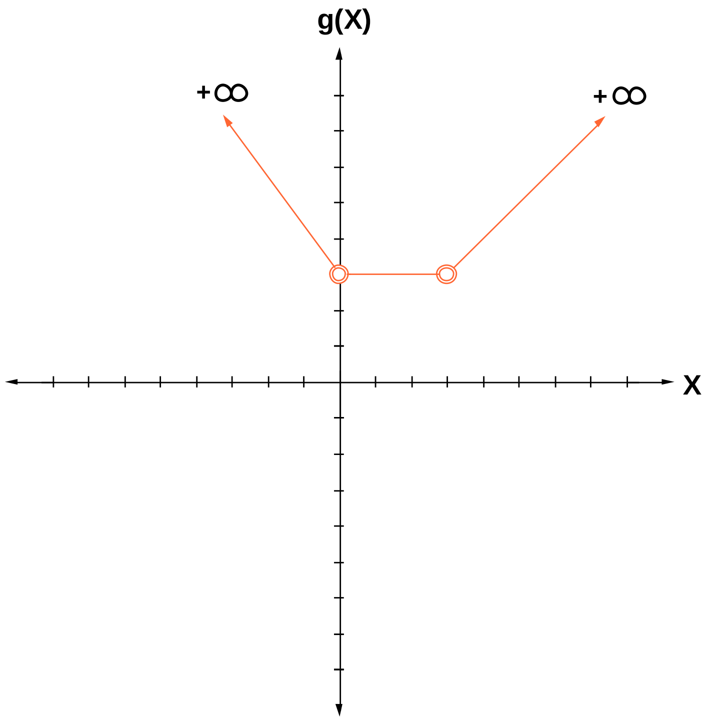


Figura 4.18: Gráfica de la función $g(X)$

Dominio o campo de existencia de $g(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales, excepto $X = 0$ y $X = 3$.

$$Dg(X) = X/X \in R_2, \ excepto \ X = 0 \quad y \quad X = 3$$

Rango o ámbito de $g(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que $Y \geq 3$

$$Rg(X) = Y/Y \geq 3$$

(4.7)

$$x = \begin{cases} -X - 1 \quad si \quad X < 1 \\ X - 4 \quad si \quad 1 < X < 4 \\ -X - 4 \quad si \quad X \geq 4 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $f_1(X) = -X - 1$	1. $Y = -X - 1$
2. $f_2(X) = X - 4$	2. $Y = X - 4$
3. $f_3(X) = -X - 4$	3. $Y = -X - 4$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = -X - 1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -A/B = -1$, ángulo de inclinación 135 grados.
Ecuación ordenada: $X + Y + 1 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -1 \Longrightarrow P_1(0, -1)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -1 \Longrightarrow P_2(-1, 0)$$

2.$Y = X - 4$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta enR_2.
Pendiente de la recta:$m = -A/B = 1$, ángulo de inclinación 45 grados.
Ecuación ordenada: $X - Y - 4 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -4 \Longrightarrow P_1(0, -4)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -4 \Longrightarrow P_2(-4, 0)$$

3.$Y = -X - 4$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -A/B = -1$, ángulo de inclinación 135 grados.
Ecuación ordenada: $X + Y + 4 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -4 \Longrightarrow P_1(0, -4)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -4 \Longrightarrow P_2(-4, 0)$$

Análisis de condicionantes: no se requiere.
Gráfica simultanea de ecuaciones:

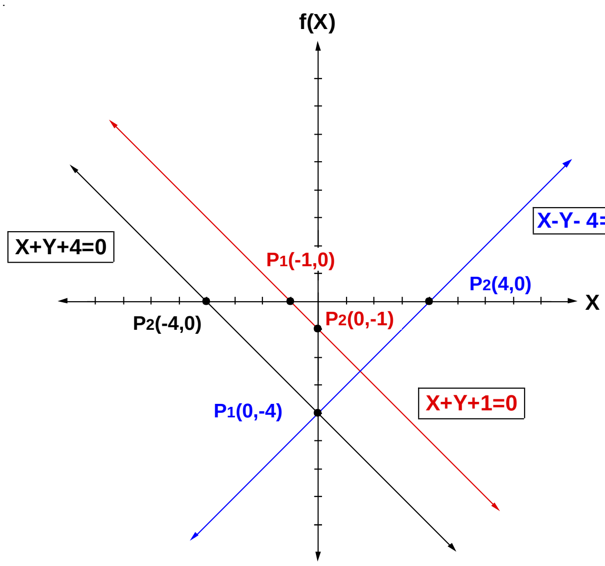


Figura 4.19

Generando la función $f(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

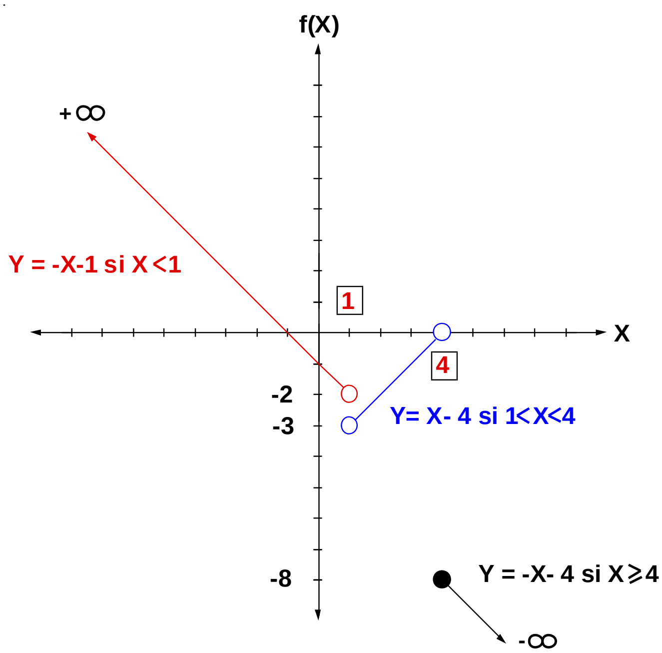


Figura 4.20

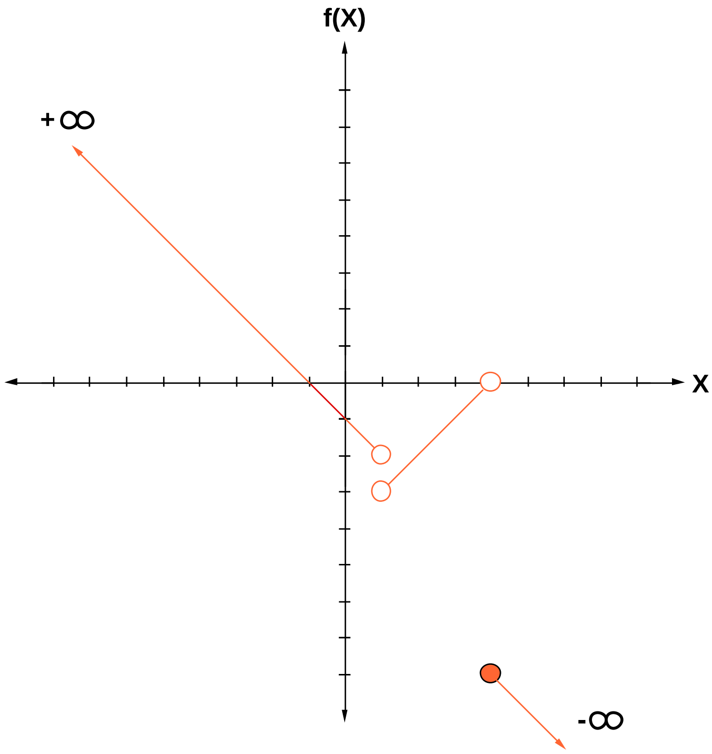


Figura 4.21: Gráfica de la función $f(X)$

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales, excepto $X = 1$.

$$Df(X) = X/X \in R_2,\ excepto\ X = 1$$

Rango o ámbito de $f(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que $Y > -3$ o $Y \leq -8$

$$Rf(X) = Y/Y > -3 \quad o \quad Y \leq -8$$

(4.8)
$$f(X) = \begin{cases} X + 6 & si \quad X < -6 \\ \sqrt{36 - X^2} & si \quad -6 \leq X \leq 6 \\ X - 6 & si \quad 6 < X \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $f_1(X) = -X + 6$	1. $Y = -X + 6$
2. $f_2(X) = \sqrt{36 - x^2}$	2. $Y = \sqrt{36 - x^2}$
3. $f_3(X) = X - 6$	3. $Y = X - 6$

Análisis de ecuaciones:

1. Y =X+6
Grado de la ecuación: **primer grado.**
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -A/B = 1$
Ecuación ordenada: $X - Y + 6 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 6 \Longrightarrow P_1(0, 6)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -6 \Longrightarrow P_2(-6, 0)$$

2. $Y = \sqrt{36 - X^2}$
Grado de la ecuación: segundo grado.
Representa: una curva en R_2.
Ecuación ordenada: $X^2 + Y^2 = 36$
Ecuación corresponde a la forma canónica de la circunferencia $X^2 + Y^2 = r^2$, es decir una circunferencia de centro origen y radio = 6 unidades.

3. $Y = X - 6$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -A/B = 1$
Ecuación ordenada: $X - Y - 6 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -6 \Longrightarrow P_1(0, -6)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 6 \Longrightarrow P_2(6, 0)$$

Análisis de condicionantes: no se requiere.
Gráfica simultanea de ecuaciones:

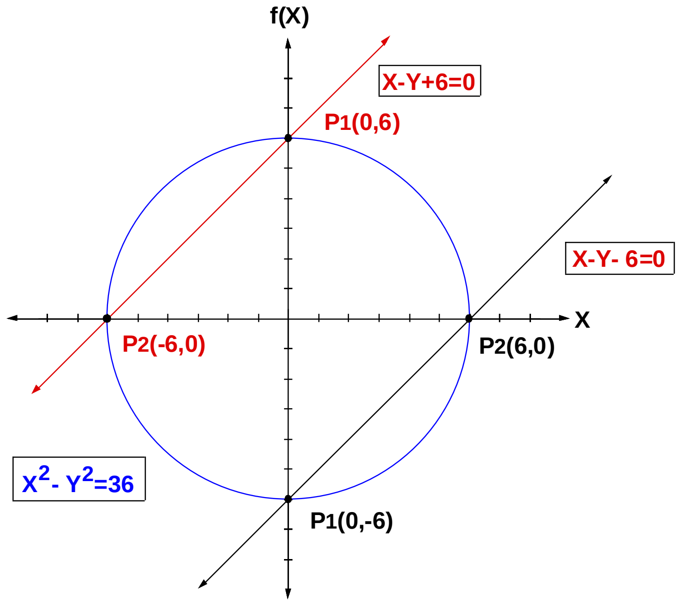


Figura 4.22

Generando la función $f(X)$:

En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

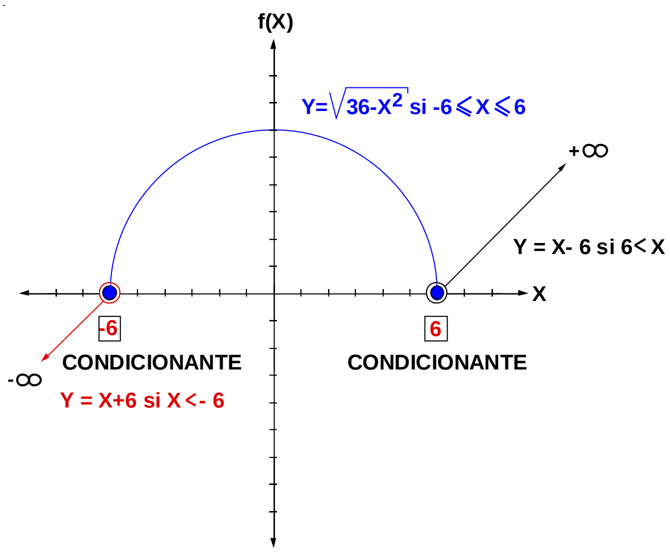


Figura 4.23

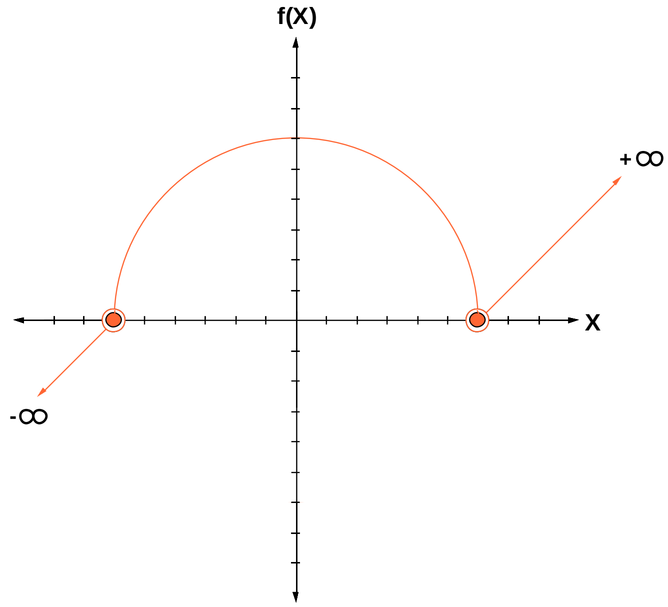


Figura 4.24: Gráfica de la fución $f(X)$

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de $f(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y pertenesca al conjunto infinito de los números reales.

$$Rf(X) = \{Y/Y \in R_2\}$$

$$g(X) = \begin{cases} X+6 \quad si \quad X < -4 \\ \sqrt{16-x^2} \quad si \quad -4 \le X \le 4 \\ 6-X \quad si \quad 4 < X \end{cases} \tag{4.9}$$

Sub-funciones:

1. $g_1(X) = -X + 6$

Ecuaciones:

1. $Y = -X + 6$

2. $g_2(X) = \sqrt{16 - x^2}$ 2. $Y = \sqrt{16 - x^2}$
3. $g_3(X) = 6 - X$ 3. $Y = 6 - X$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = X + 6$
Grado de la ecuación: **primer grado**.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/_{B} = 1$, ángulo de inclinación de la recta 45 grados.
Ecuación ordenada: $X - Y + 6 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 6 \Longrightarrow P_1(0, 6)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -6 \Longrightarrow P_2(-6, 0)$$

2. $Y = \sqrt{16 - X^2}$
Grado de la ecuación: segundo grado.
Representa: una curva en R_2.
Ecuación ordenada: $X^2 + Y^2 = 16$
Ecuación corresponde a la forma canónica de la circunferencia $X^2 + Y^2 = r^2$, es decir una circunferencia de centro origen y radio = 4 unidades.

3. $Y = 6 - X$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/_{B} = -1$, ángulo de inclinación de la recta 135 grados.
Ecuación ordenada: $X + Y - 6 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 6 \Longrightarrow P_1(0, 6)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 6 \Longrightarrow P_2(6, 0)$$

Análisis de condicionantes: no se requiere.
Gráfica simultanea de ecuaciones:

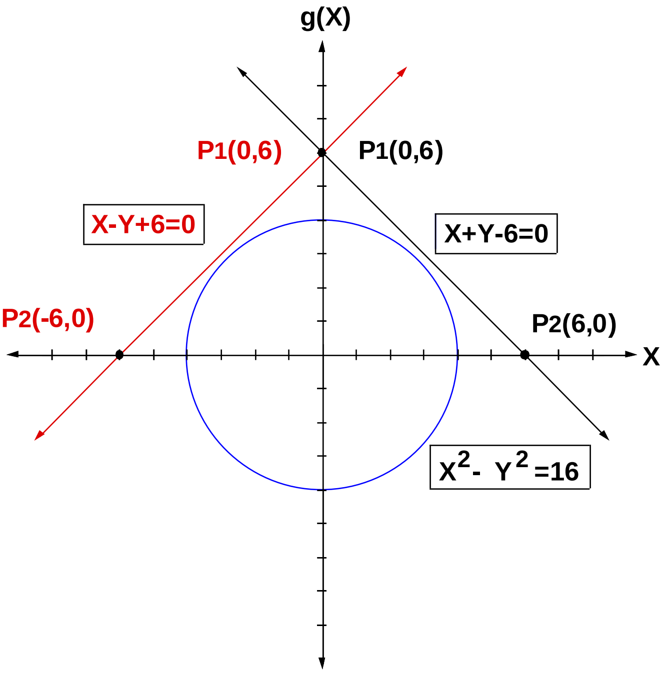


Figura 4.25

Generando la función $g(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

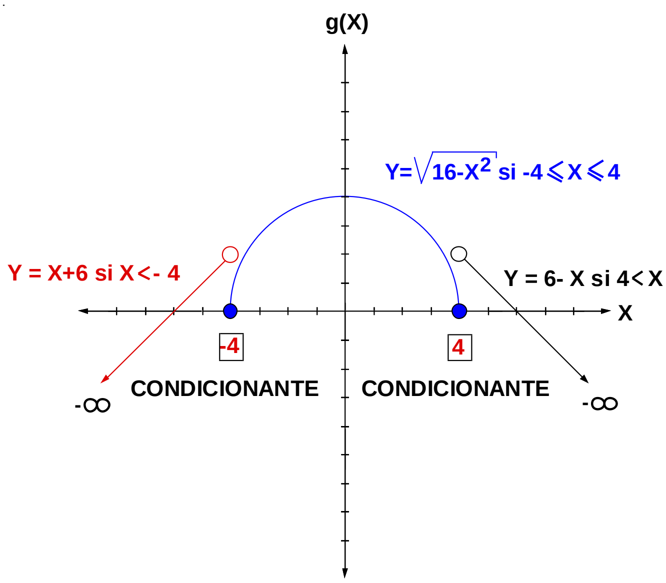


Figura 4.26

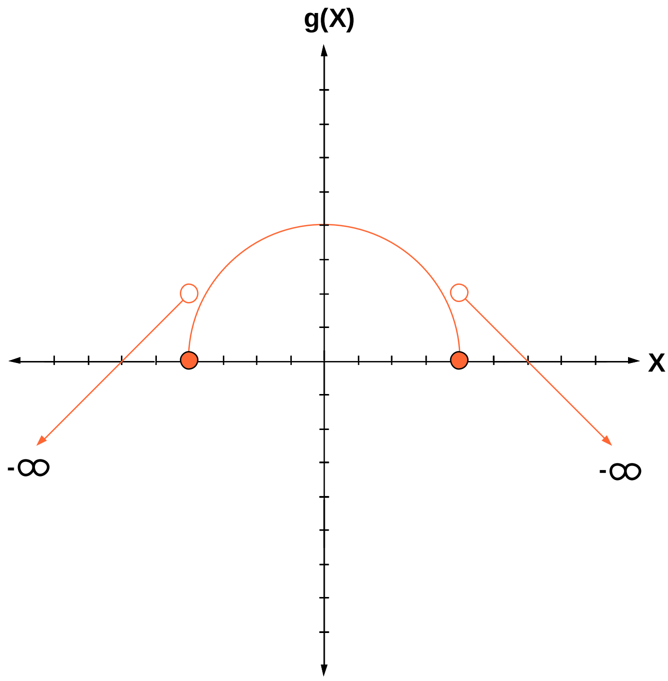


Figura 4.27: Gráfica de la funcion $g(X)$

Dominio o campo de existencia de $g(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Dg(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de $g(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que $Y \leq 4$

$$Rg(X) = \{Y/Y \leq 4\}$$

4.2. Función valor absoluto o módulo “X”

4.2.1. Definición

La función “**Valor Absoluto o Módulo**” es un tipo especial de función compuesta, misma que está constituida únicamente por dos “**subfunciones**” de “**X**”, cada uno de estos elementos constitutivos de la función principal al igual que antes, está acompañado de un determinado “**condicionante o condicionamiento**” de tal manera que al concluir el análisis cada una de las "**sub-funciones**" aportará a la generación de una función en R_2.

Se denota por $|X|$ es decir $f(X) = |X|$

La función queda definida entonces como sigue:

$$f(X) = |X| = \begin{cases} X & si \quad X \geq 0 \\ -X & si \quad X < 0 \end{cases}$$

Es importante indicar el hecho que, una función **exclusivamente** de tipo módulo, no podrá por sus características ser nunca negativa, es decir invadir áreas negativas de $f(X)$.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

Determinar el dominio, rango y trazar la gráfica para las funciones definidas por:

Se dará inicio analizando en primer término la definición.

$$f(X) = |X| = \begin{cases} X & si \quad X \geq 0 \\ -X & si \quad X < 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $f_1(X) = X$	1. $Y = X$
2. $f_2(X) = -X$	2. $Y = -X$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = X$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}/_{B} = 1$

Ecuación ordenada: $X - Y = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 0 \Longrightarrow P_1(0,0)$$

$$b)\ Con\ Y = 3;\ X = 3 \Longrightarrow P_2(3,3) \quad punto\ arbitrario.$$

2. $Y = -X$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/_{B} = -1$

Ecuación ordenada: $X + Y = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 0 \Longrightarrow P_1(0,0)$$

$$b)\ Con\ Y = -3; X = 3 \Longrightarrow P_2(3,-3) \quad punto\ arbitrario.$$

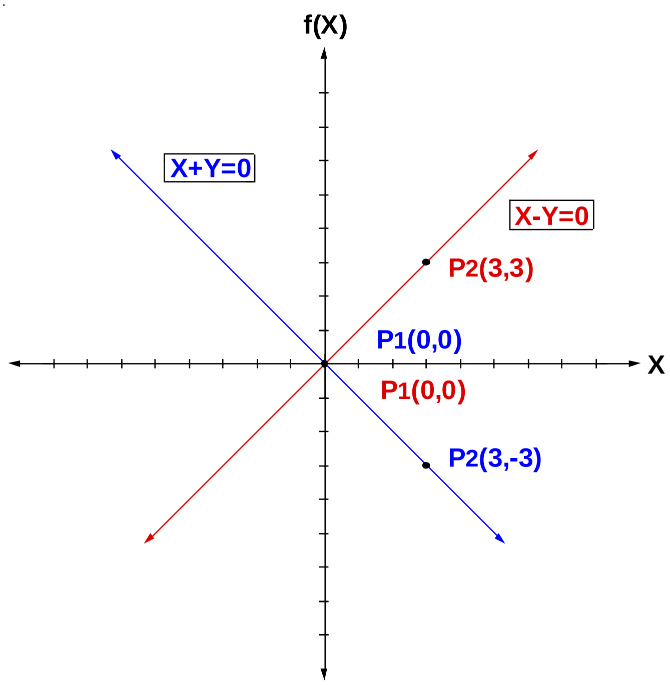


Figura 4.28

En la representación anterior se observa la gráfica simultánea de ecuaciones:

Generando la función $f(X)$:

En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

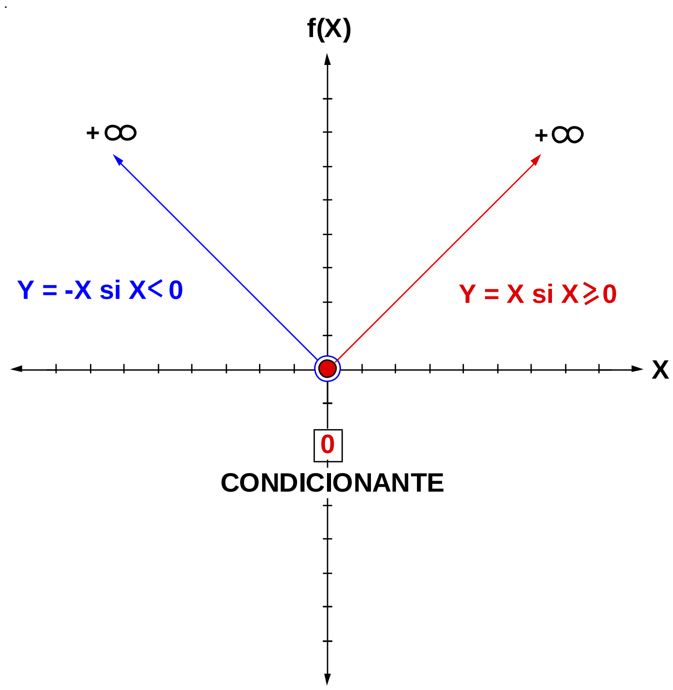


Figura 4.29

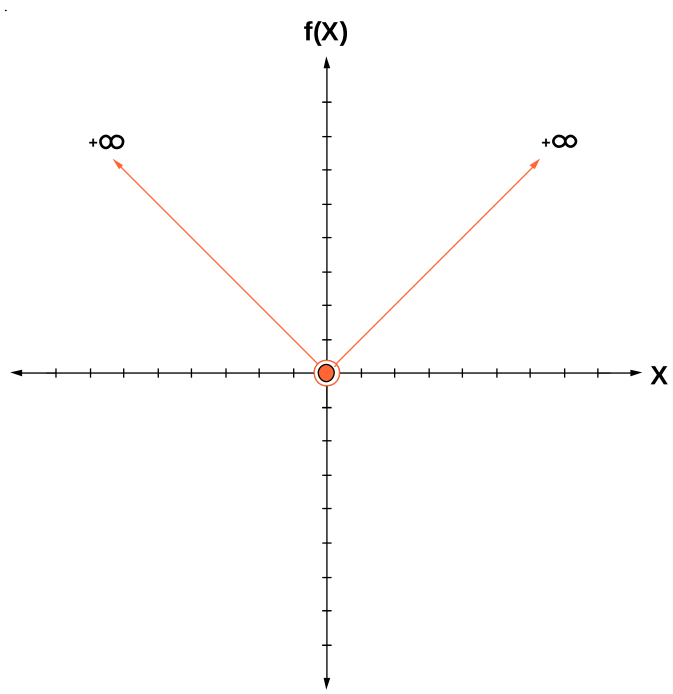


Figura 4.30: Gráfica de la función $h(X)$

$$(4.11) \qquad f(X) = |X-4| = \begin{cases} X-4 & si \quad X-4 \geq 0 \\ -(X-4) & si \quad X-4 < 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$|X-4| = \begin{cases} X-4 & si \quad X-4 \geq 0 \\ -(X-4) & si \quad X-4 < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes

$$a) X-4 \geq 0 \quad X \geq 4$$

$$b) X-4 < 0 \quad X < 4$$

Función definida:

$$|X-4| = \begin{cases} X-4 & si \quad X-4 \geq 4 \\ -X+4 & si \quad X < 4 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $h_1(X) = X-4$	1. $Y = X-4$
2. $h_2(X) = -X+4$	2. $Y = -X+4$

Análisis de ecuaciones:

1.$Y = X-4$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}/_{B} = 1$
Ecuación ordenada: $X - Y - 4 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a) \ Con \ X = 0; \ Y = -4 \Longrightarrow P_1(0,-4)$$

$$b) \ Con \ Y = 0; \ X = 4 \Longrightarrow P_2(4,0)$$

2.$Y = -X+4$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/_{B} = -1$

Ecuación ordenada: $X + Y - 4 = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 4 \Longrightarrow P_1(0, 4)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 4 \Longrightarrow P_2(4, 0)$$

Gráfica simultanea de ecuaciones:

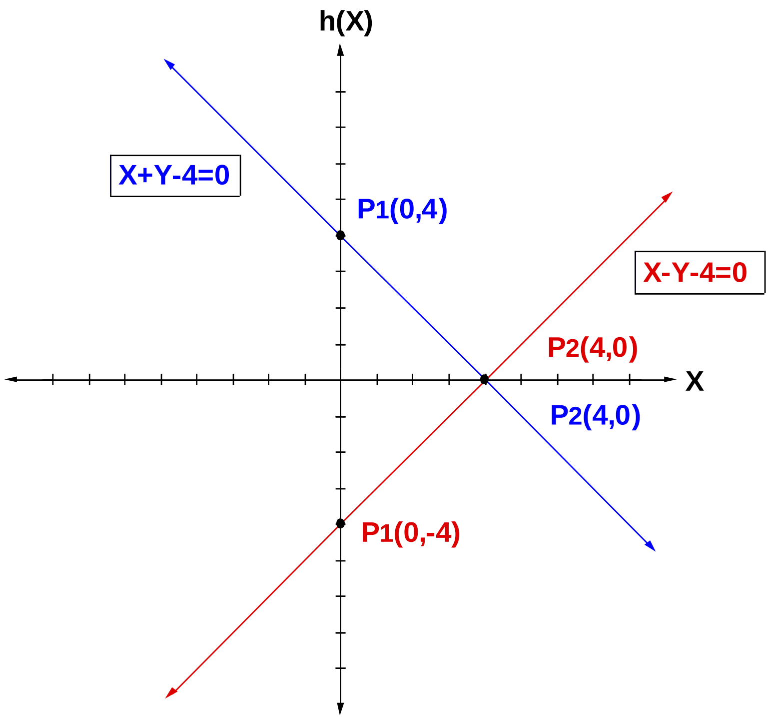


Figura 4.31

Generando la función $h(X)$**:**

En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

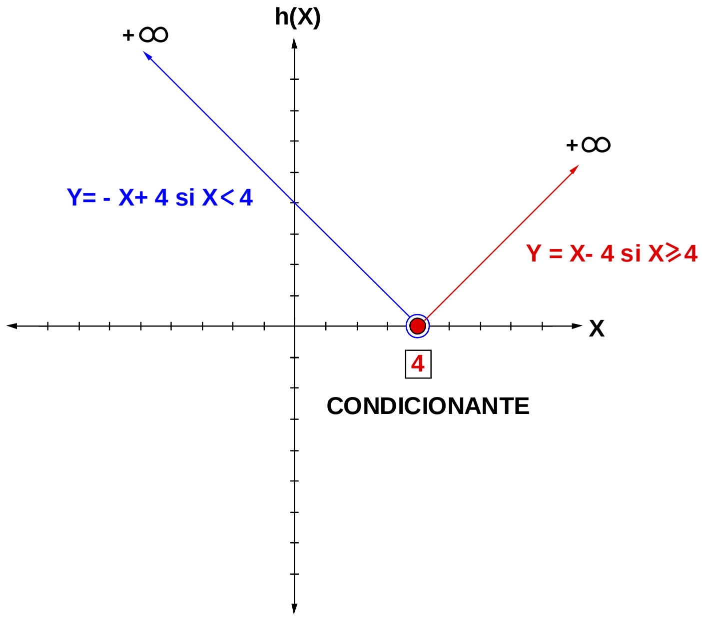


Figura 4.32

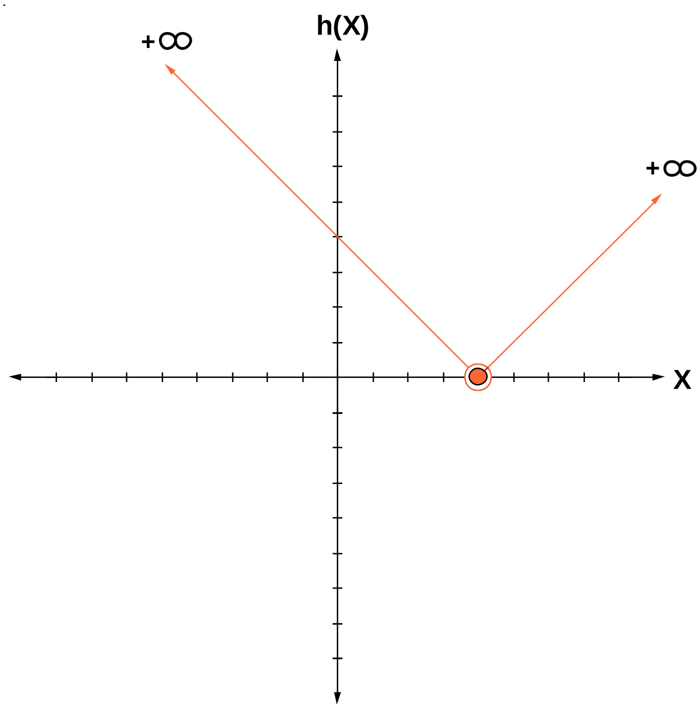


Figura 4.33: Gráfica de la función $g(X)$

Dominio o campo de existencia de $h(X)$:
Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Dh(X) = X/X \in R_2$$

Rango o ámbito de $h(X)$:
Conjunto de valores de Y tal que $Y \geq 0$

$$Rh(X) = Y/Y \geq 0$$

(4.12) $$g(X) = |X - 2| + 4$$

Aplicando la definición se tiene:

$$|x - 2| = \begin{cases} X - 2 & si \quad X - 2 \geq 0 \\ -(X - 2) & si \quad X - 2 < 0 \end{cases}$$

Por lo que la función será:

$$|x - 2| + 4 = \begin{cases} X - 2 + 4 & si \quad X - 2 \geq 0 \\ -X + 2 + 4 & si \quad X - 2 < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:

$$a) X - 2 \geq 0 \quad X \geq 2$$

$$b) X - 2 < 0 \quad X < 2$$

Función definida:

$$|x - 2| + 4 = \begin{cases} X + 2 & si \quad X - 2 \geq 0 \\ -X + 6 & si \quad X - 2 < 0 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $g_1(X) = X + 2$	1. $Y = X + 2$
2. $g_2(X) = -X + 6$	2. $Y = -X + 6$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = X + 2$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}/{}_{B} = 1$
Ecuación ordenada: $X - Y + 2 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 2 \Longrightarrow P_1(0, 2)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -2 \Longrightarrow P_2(-2, 0)$$

2. $Y = -X + 6$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta:$m = -{}^{A}/{}_{B} = -1$
Ecuación ordenada: $X + Y - 6 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 6 \Longrightarrow P_1(0, 6)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 6 \Longrightarrow P_2(6, 0)$$

Gráfica simultanea de ecuaciones:

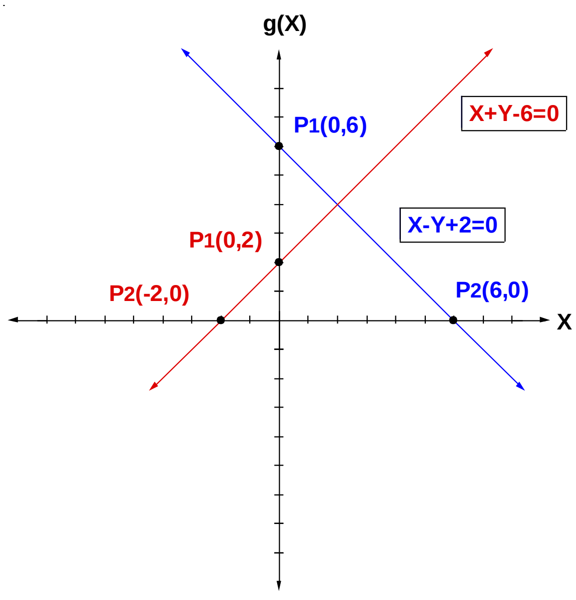


Figura 4.34

Generando la función $g(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

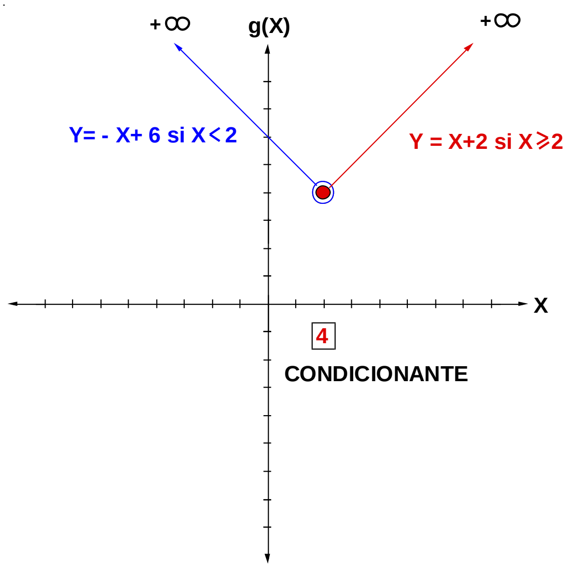


Figura 4.35

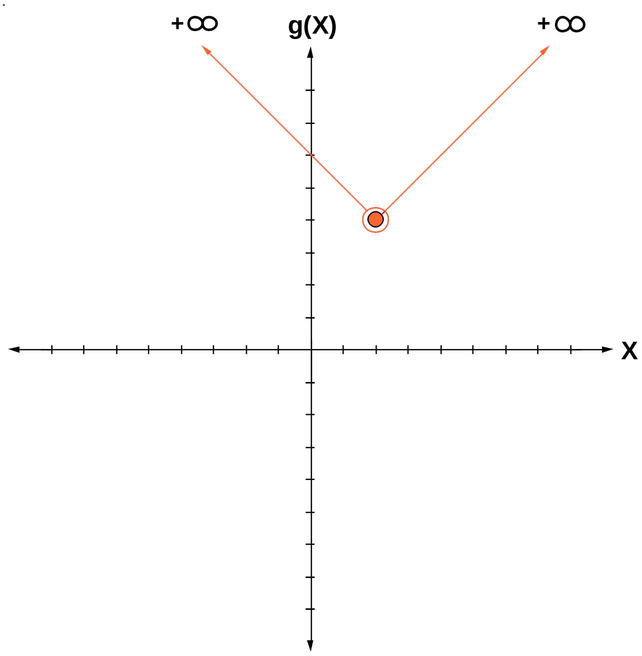


Figura 4.36: Gráfica de la función $f(X)$

Dominio o campo de existencia de $g(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Dg(X) = X/X \in R_2$$

Rango o ámbito de $g(X)$:
Conjunto de valores de Y tal que $Y \geq 4$

$$Rg(X) = Y/Y \geq 4$$

(4.13) $$f(X) = |X + 2| + X$$

$$|x - 2| = \begin{cases} X + 2 \quad si \quad X + 2 \geq 0 \\ -(X + 2) \quad si \quad X + 2 < 0 \end{cases}$$

Por lo que la función será:

$$|x - 2| + X = \begin{cases} X + 2 + X \quad si \quad X + 2 \geq 0 \\ -(X + 2) + X \quad si \quad X + 2 < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:

$$a) X + 2 \geq 0 \quad X \geq -2$$

$$b) X + 2 < 0 \quad X < -2$$

Función definida:

$$|x - 2| + X = \begin{cases} 2X + 2 \quad si \quad X \geq -2 \\ -2 \quad si \quad X < -2 \end{cases}$$

Sub-funciones:
1. $f_1(X) = 2X - 2$
2. $f_2(X) = -2$

Ecuaciones:
1. $Y = 2X - 2$
2. $Y = -2$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = 2X + 2$
Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}/_{B} = 2$
Ecuación ordenada: $2X - Y + 2 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 2 \Longrightarrow P_1(0, 2)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -1 \Longrightarrow P_2(-1, 0)$$

2. $Y = -2$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.
Gráfica simultanea de ecuaciones:

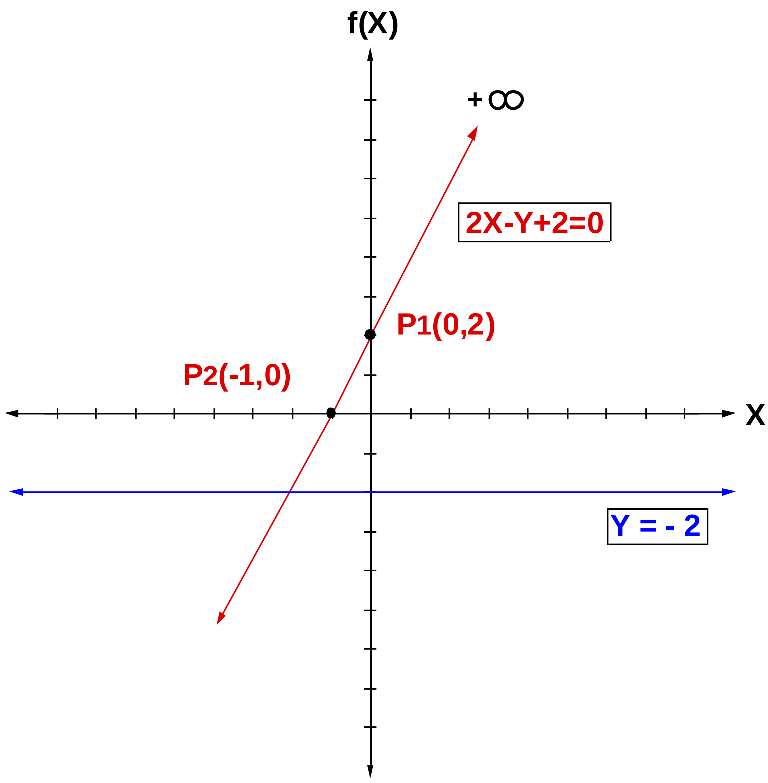


Figura 4.37

Generando la función $f(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

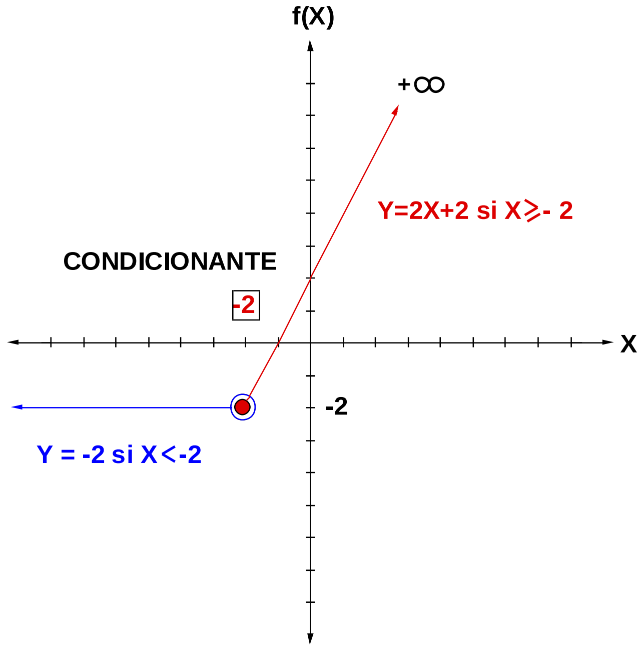


Figura 4.38

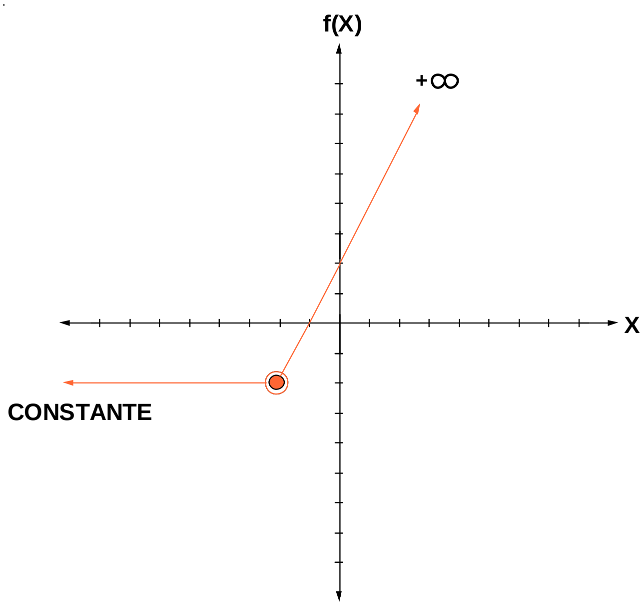


Figura 4.39: Gráfica de la fucnión $f(X)$

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = X/X \in R_2$$

Rango o ámbito de $f(X)$:
Conjunto de valores de Y tal que $Y \geq -2$

$$Rf(X) = Y/Y \geq -2$$

(4.14) $$f(X) = |X-2| - X$$

Aplicando la definición se tiene:

$$|X-2| = \begin{cases} X-2 \quad si \quad X-2 \geq 0 \\ -(X-2) \quad si \quad X-2 < 0 \end{cases}$$

Por lo que la función será:

$$|X-2| - X = \begin{cases} X-2-X \quad si \quad X-2 \geq 0 \\ -X+2-X \quad si \quad X-2 < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:

$$a) X-2 \geq 0 \quad X \geq 2$$

$$b) X-2 < 0 \quad X < 2$$

Función definida:

$$|X-2| - X = \begin{cases} -2 \quad si \quad X \geq 2 \\ -2X+2 \quad si \quad X < 2 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $f_1(X) = -2$	1. $Y = -2$
2. $f_2(X) = -2X + 2$	2. $Y = -2X + 2$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = -2$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

2. $Y = -2X + 2$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}/_{B} = -2$
Ecuación ordenada: $2X + Y - 2 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 2 \Longrightarrow P_1(0,2)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 1 \Longrightarrow P_2(1,0)$$

Gráfica simultanea de ecuaciones:

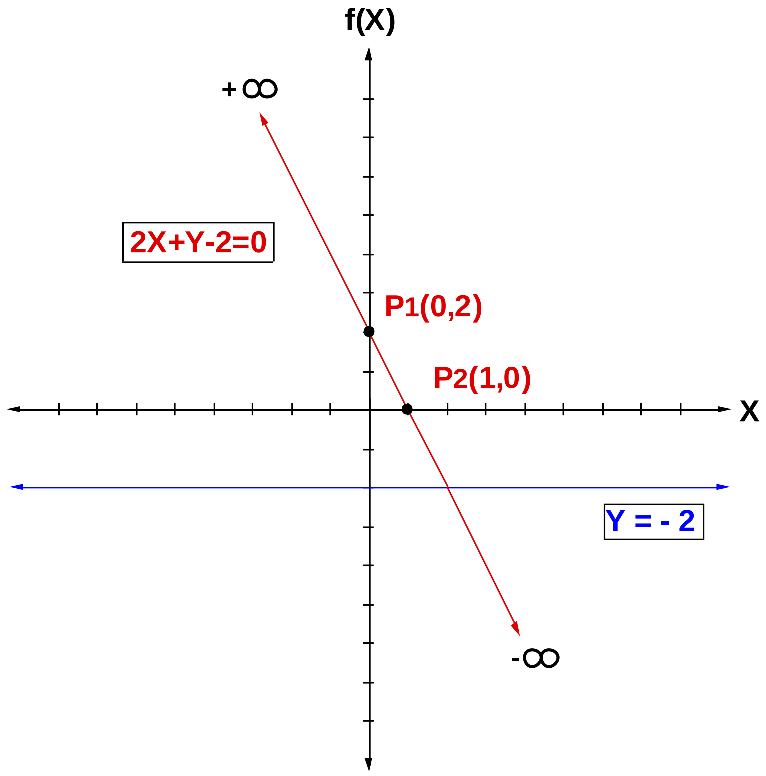


Figura 4.40

Generando la función $f(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

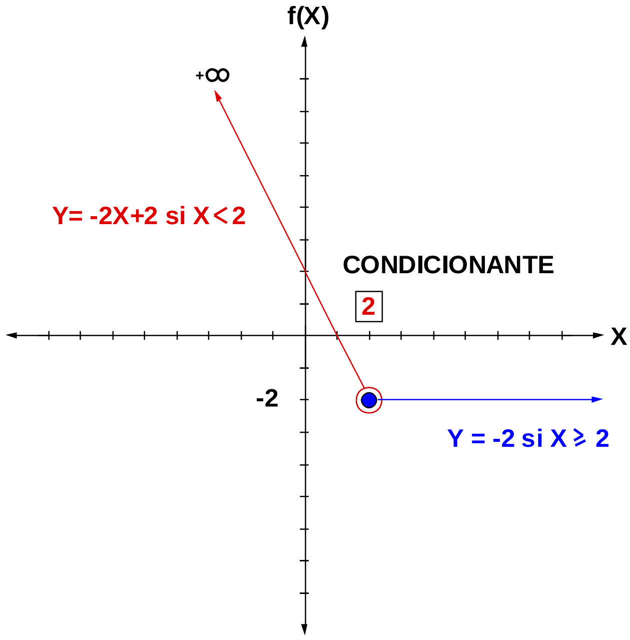


Figura 4.41

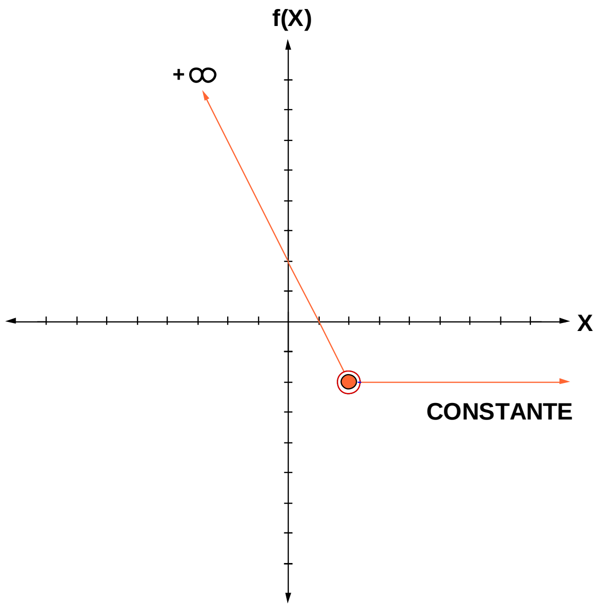


Figura 4.42: Gráfica de la función $k(X)$

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:
Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = X/X \in R_2$$

Rango o ámbito de $f(X)$:
Conjunto de valores de Y tal que $Y \geq -2$

$$Rf(X) = Y/Y \geq -2$$

(4.15) $$k(X) = \frac{|X|}{X}$$

Aplicando la definición se tiene:

$$|X| = \begin{cases} X & si \quad X > 0 \\ -X & si \quad X \leq 0 \end{cases}$$

Por lo que la función será:

$$\frac{|X|}{X} = \begin{cases} \frac{X}{X} & si \quad X > 0 \\ \frac{-X}{X} & si \quad X \leq 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:
No se requiere.
Función definida:

$$\frac{|X|}{X} = \begin{cases} 1 & si \quad X > 0 \\ -1 & si \quad X \leq 0 \end{cases}$$

Se excluye el valor de cero por cuanto X no puede tomar este valor.

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $k_1(X) = 1$	1. $Y = 1$
2. $k_2(X) = -1$	2. $Y = -1$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = 1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

2. $Y = -1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.
Gráfica simultanea de ecuaciones:

.

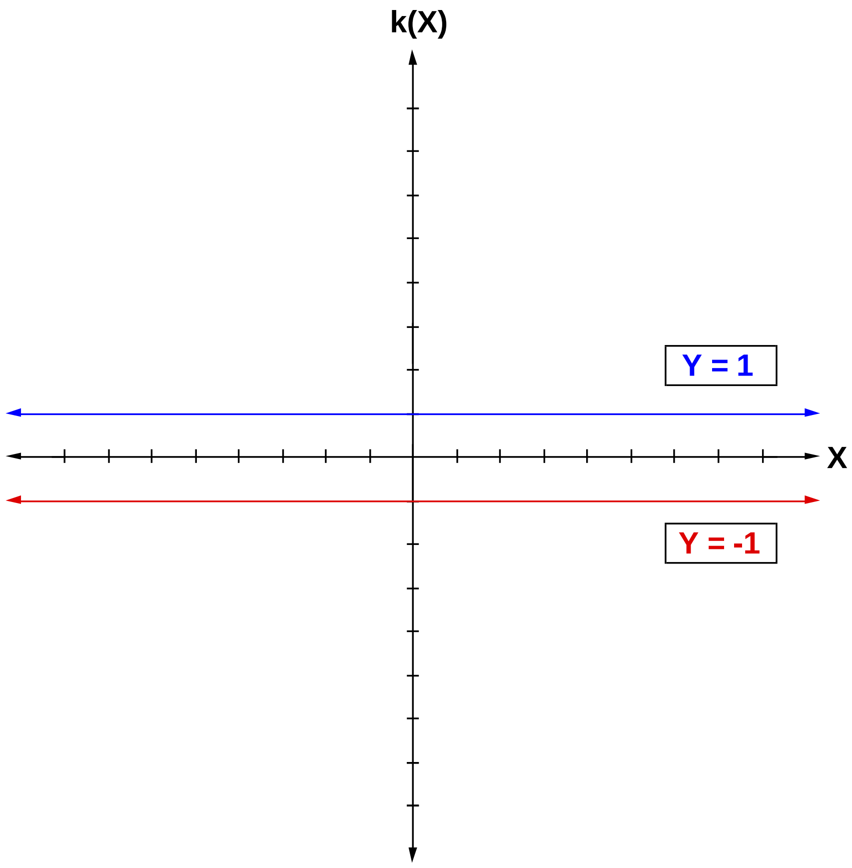


Figura 4.43

Generando la función $k(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

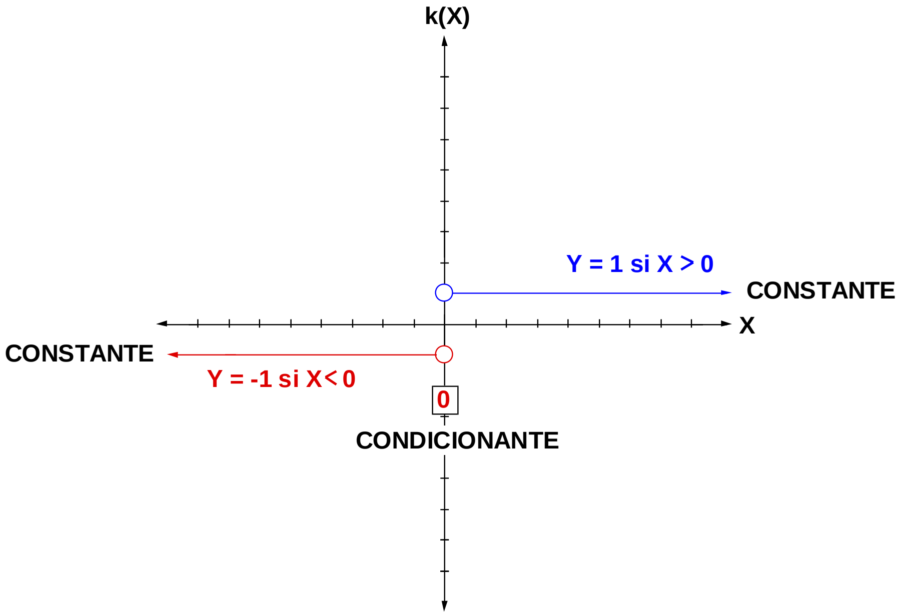


Figura 4.44

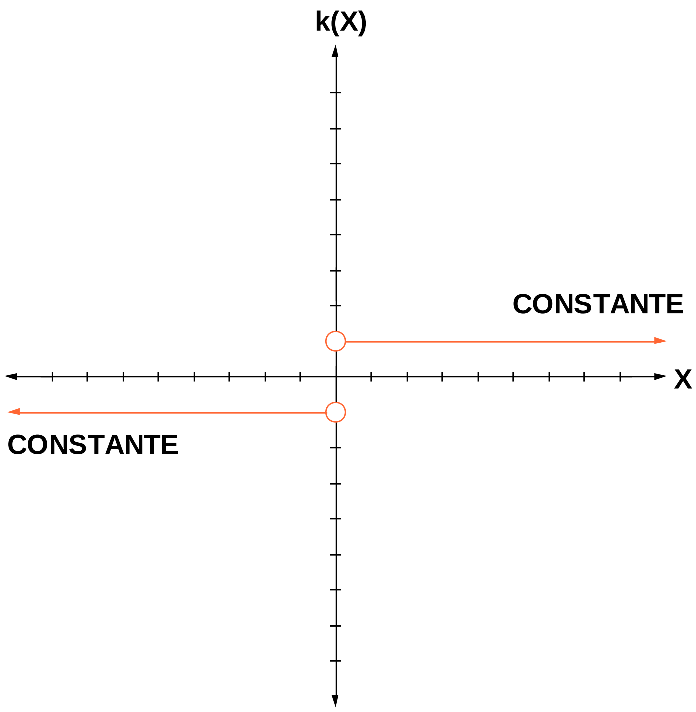


Figura 4.45: Gráfica de la función $k(X)$

Dominio o campo de existencia de $k(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales, excepto $X = 0$.

$$Dk(X) = X/X \in R_2, \; excepto \; X = 0$$

Rango o ámbito de $k(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que $Y = 1$ y $Y = -1$

$$Rk(X) = Y/Y = 1 \quad y \quad Y = -1$$

(4.16) $$f(X) = |X - 4| + |X + 4|$$

Aplicando la definición en el primer módulo se tiene:

$$|X - 4| = \begin{cases} X - 4 & si \quad X - 4 \geq 0 \\ -(X - 4) & si \quad X - 4 < 0 \end{cases}$$

Aplicando la definición en el segundo módulo se tiene:

$$|X + 4| = \begin{cases} X + 4 & si \quad X + 4 \geq 0 \\ -(X + 4) & si \quad X - 4 < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes en los dos módulos:

$$a) \; X - 4 \geq 0 \quad X \geq 4$$

$$b) \; X - 4 < 0 \quad X < 4$$

$$a) \; X + 4 \geq 0 \quad X \geq -4$$

$$b) \; X + 4 < 0 \quad X < -4$$

Entonces se tendrá:

$$|X - 4| = \begin{cases} X - 4 & si \quad X \geq 4 \\ -X + 4 & si \quad X < 4 \end{cases}$$

$$|X + 4| = \begin{cases} X + 4 & si \quad X \geq -4 \\ -X - 4 & si \quad X < -4 \end{cases}$$

Intersección de condicionantes 1 y 1:

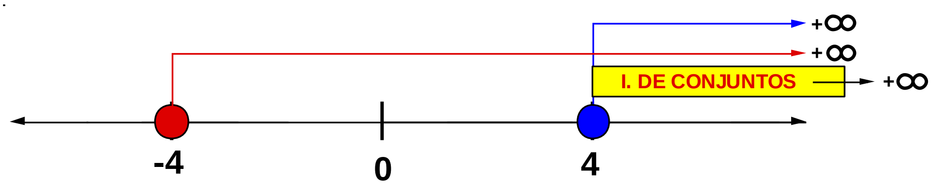


Figura 4.46

$$\{x/x \geq 4\}$$

Intersección de condicionantes 2 y 2:

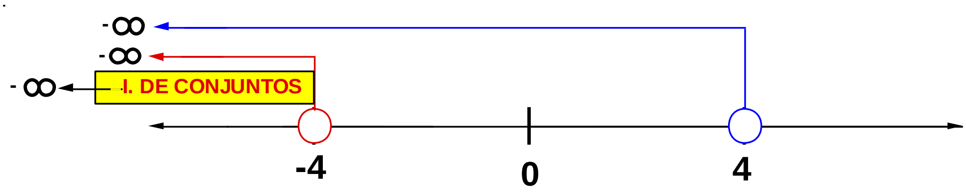


Figura 4.47

$$\{x/x \geq -4\}$$

Intersección de condicionantes 2 y 1:

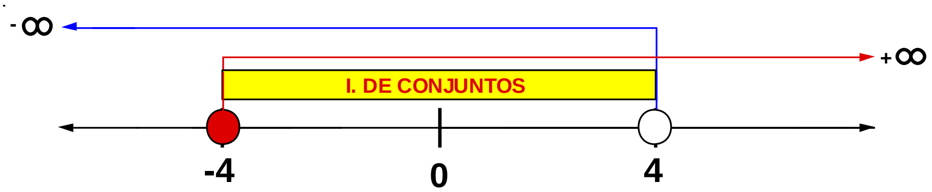


Figura 4.48

$$\{x/[-4 \leq x < -4\}$$

Función definida:

$$|X-4| + |X+4| == \begin{cases} 2X & si \quad X \geq 4 \\ 8 & si \quad -4 \leq X < 4 \\ -2X & si \quad X < -4 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $f_1(X) = 2X$	1. $Y = 2X$
2. $f_2(X) = 8$	2. $Y = 8$
3. $f_3(X) = -2X$	3. $Y = -2X$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = 2X$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Pendiente de la recta:$m = -{}^{A}\!/\!{}_{B} = 2$

Ecuación ordenada: $2X - Y = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 0 \Longrightarrow P_1(0,0)$$

$$b)\ Con\ Y = 2;\ X = 1 \Longrightarrow P_2(1,2) \quad puntoarbitrario.$$

2. $Y = 8$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

3. $Y = -2X$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/\!{}_{B} = -2$

Ecuación ordenada: $2X + Y = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

Gráfica simultanea de ecuaciones:

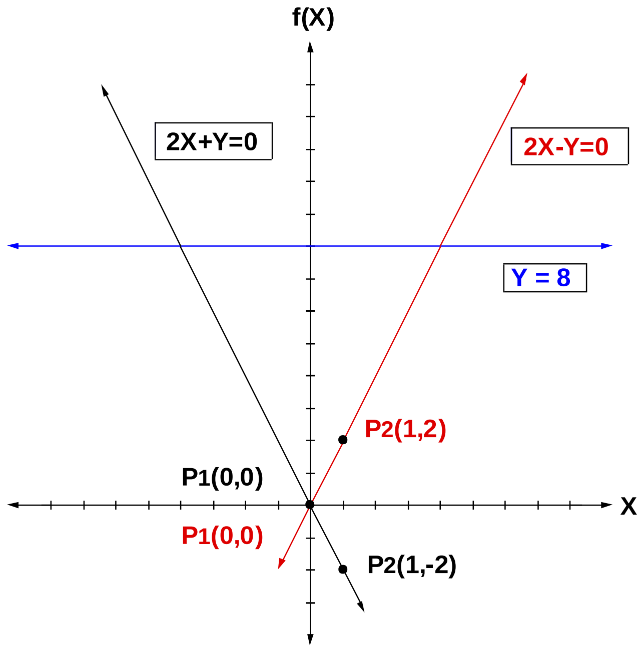


Figura 4.49

Generando la función $f(X)$:

En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

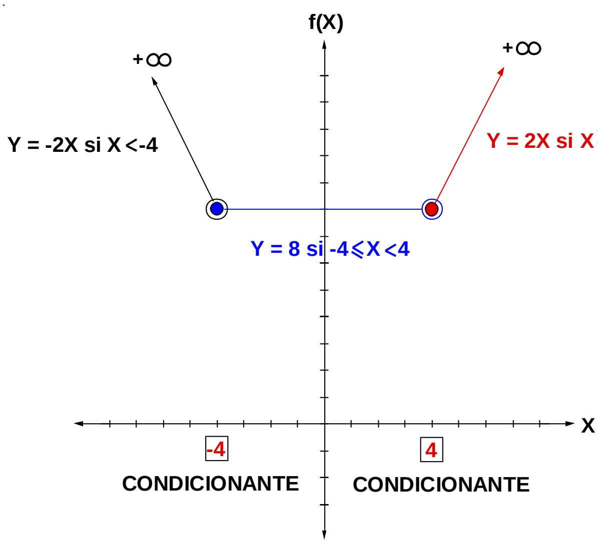


Figura 4.50

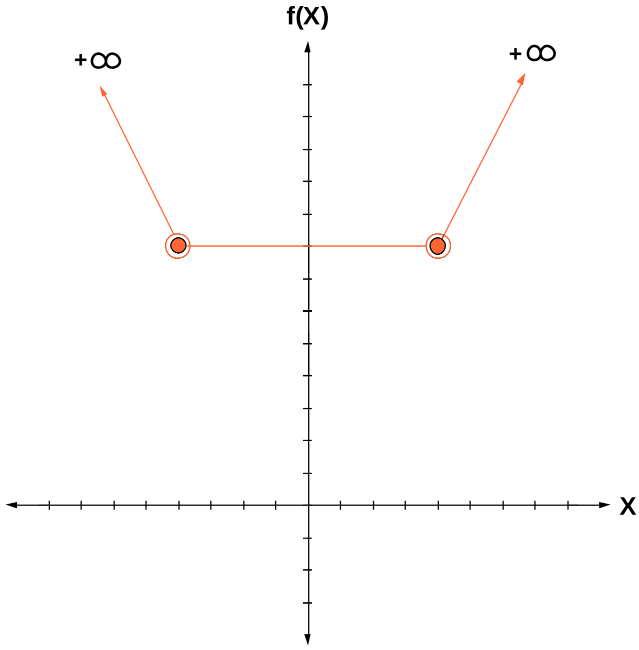


Figura 4.51: Gráfica de la función $f(X)$

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = X/X \in R_2$$

Rango o ámbito de $f(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que $Y \geq 8$

$$Rf(X) = Y/Y \geq 8$$

$$g(X) = |X| - \frac{|X|}{X} \tag{4.17}$$

Aplicando la definición se tiene:

$$g(X) = \begin{cases} X \quad si \quad X > 0 \\ -X \quad si \quad X < 0 \end{cases}$$

Se excluye el valor de cero por cuanto X no puede tomar este valor.
Por lo que la función será:

$$|X| - \frac{|X|}{X} = \begin{cases} X - \frac{X}{X} & si \quad X > 0 \\ -(X - \frac{X}{X}) & si \quad X < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:
No se requiere.
Función definida:

$$|X| - \frac{|X|}{X} = \begin{cases} X - 1 & si \quad X > 0 \\ -X + 1 & si \quad X < 0 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $g_1(X) = X - 1$	1. $Y = X - 1$
2. $g_2(X) = -X + 1$	2. $Y = -X + 1$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = X - 1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/_{B} = 1$
Ecuación ordenada: $X - Y - 1 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -1 \Longrightarrow P_1(0, -1)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 1 \Longrightarrow P_2(1, 0)$$

2. $Y = -X + 1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/_{B} = -1$
Ecuación ordenada: $X + Y - 1 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 1 \Longrightarrow P_1(0, 1)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 1 \Longrightarrow P_2(1, 0)$$

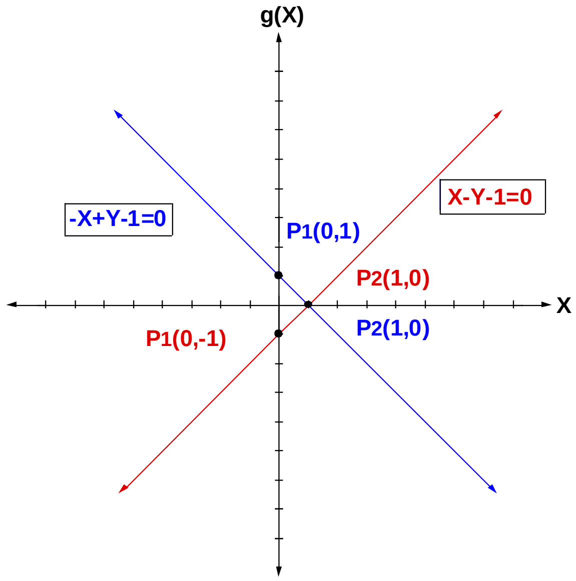


Figura 4.52

Generando la función $g(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

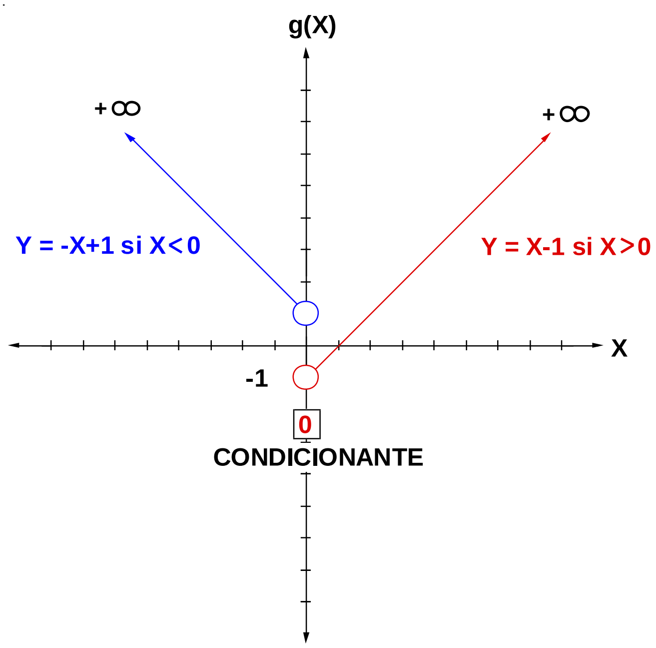


Figura 4.53

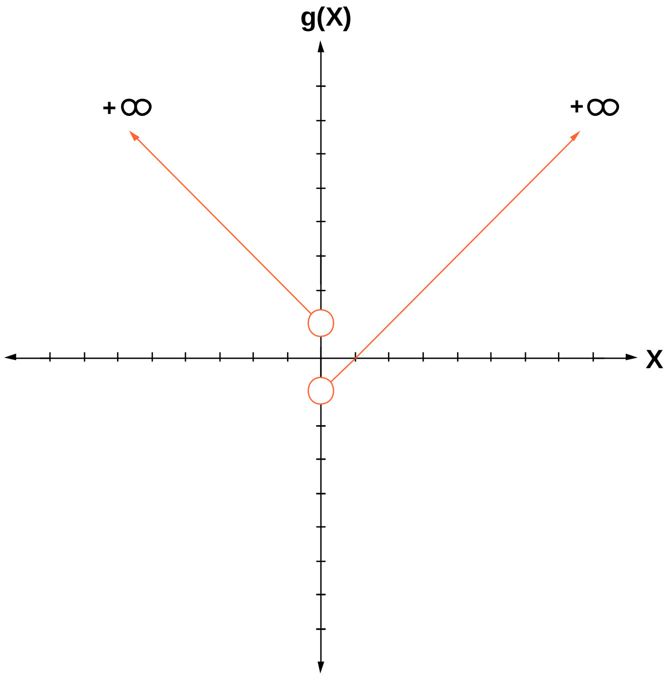


Figura 4.54: Gráfica de la función $g(X)$

Dominio o campo de existencia de $g(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales, excepto $X = 0$

$$Dg(X) = X/X \in R_2 \ , \ excepto \ X = 0$$

Rango o ámbito de $g(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que $Y \geq -1$

$$Rg(X) = Y/Y \geq -1$$

(4.18) $$f(X) = |X| \times X$$

Aplicando la definición se tiene

$$|X| = \begin{cases} X \quad si \quad X \geq 0 \\ -X \quad si \quad X < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:

No se requiere.

Función definida:

$$|X| \times X = \begin{cases} X^2 & si \quad X \geq 0 \\ -X^2 & si \quad X < 0 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $f_1(X) = X^2$	1. $Y = X^2$
2. $f_2(X) = -X^2$	2. $Y = -X^2$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = X^2$

Grado de la ecuación: segundo grado.

Representa: una curva en R_2.

Tipo de curva: Parábola cuya ecuación está en la forma canónica $X^2 = 4PY$

Características de la curva:

$V = (0, 0)$, eje coincidente con el eje Y, $P = 1/4$ como $P > 0$ los ramales se orientan hacia arriba, longitud del lado recto $LR = |4P| = |4 1/4| = 1$

Ecuación ordenada: $X^2 - Y = 0$

2. $Y = -X^2$

Grado de la ecuación: segundo grado.

Representa: una curva en R_2.

Tipo de curva: Parábola cuya ecuación está en la forma canónica $X^2 = 4PY$

Características de la curva:

$V = (0, 0)$, eje coincidente con el eje Y, $P = -1/4$ como $P < 0$ los ramales se orientan hacia abajo, longitud del lado recto $LR = |4P| = |4(-1/4)| = 1$

Ecuación ordenada: $X^2 + Y = 0$

Gráfica simultanea de ecuaciones:

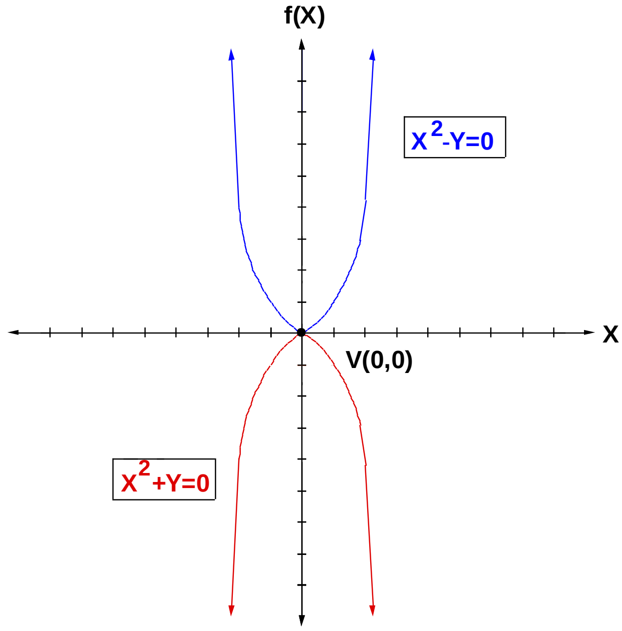


Figura 4.55

Generando la función $f(X)$**:**
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

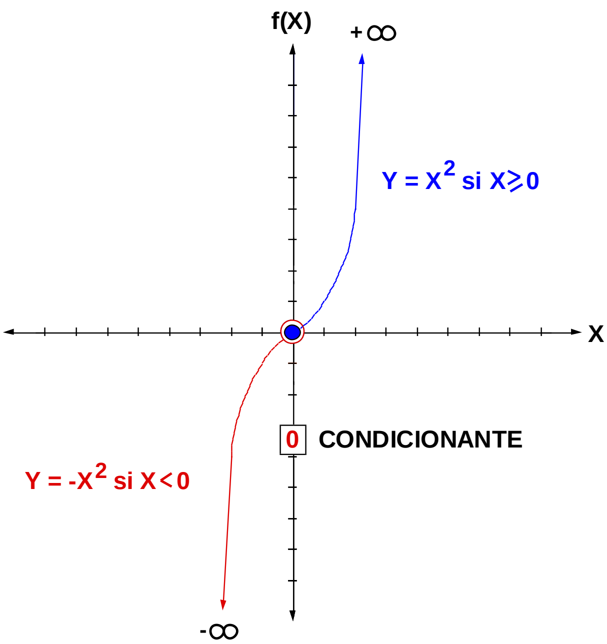


Figura 4.56

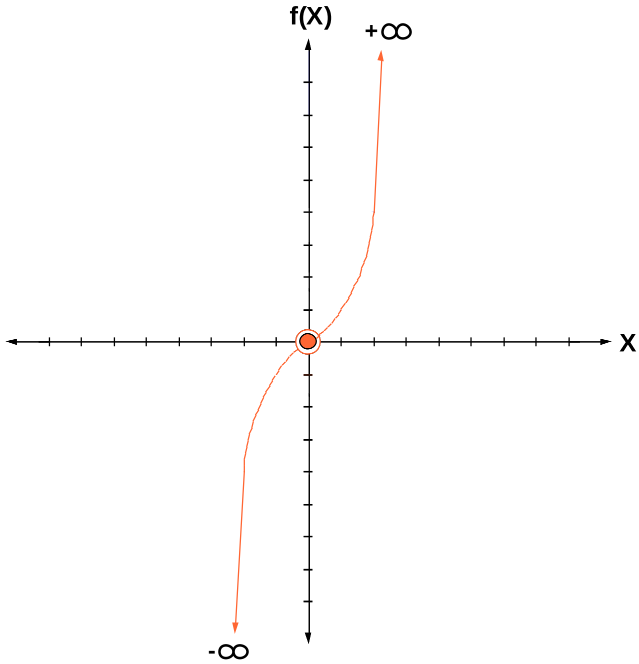


Figura 4.57: Gráfica de la función $f(X)$

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:
Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = X/X \in R_2$$

Rango o ámbito de $f(X)$:
Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Rf(X) = Y/Y \in R_2$$

(4.19) $$h(X) = X|X+2|$$

Aplicando la definición se tiene:

$$|X-2| = \begin{cases} X+2 & si \quad X+2 \geq 0 \\ -(X+2) & si \quad X+2 < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:

$$a)X + 2 \geq 0 \quad X \geq -2$$

$$b)X + 2 < 0 \quad X < -2$$

Función definida:

$$X|X-2| = \begin{cases} X(X+2) & si \quad X \geq -2 \\ X(-X-2) & si \quad X < -2 \end{cases}$$

Es decir:

$$X|X-2| = \begin{cases} X^2 + 2X & si \quad X \geq -2 \\ -X^2 - 2X & si \quad X < -2 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $h_1(X) = X^2 + 2X$	1. $Y = X^2 + 2X$
2. $h_2(X) = -X^2 - 2X$	2. $Y = -X^2 - 2X$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = X^2 + 2X$
Grado de la ecuación: segundo grado.
Representa: una curva en R_2.
Tipo de curva: Parábola de vértice (h, k)
Características de la curva:
$V = (-1, -1)$, eje paralelo al eje Y
Ecuación ordenada: $X^2 + 2X - Y = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a) \; Con \; X = 0; \; Y = 0 \Longrightarrow P_1(0, 0)$$

$$b) \; Con \; Y = 0; \; X = -2 \Longrightarrow P_2(-2, 0)$$

2. $Y = -X^2 - 2X$
Grado de la ecuación: segundo grado.
Representa: una curva en R_2.
Tipo de curva: Parábola de vértice (h, k)
Características de la curva:
$V = (-1, 1)$, eje paralelo al eje Y
Ecuación ordenada: $X^2 + 2X + Y = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 0 \Longrightarrow P_1(0,0)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -2 \Longrightarrow P_2(-2,0)$$

Gráfica simultanea de ecuaciones:

.

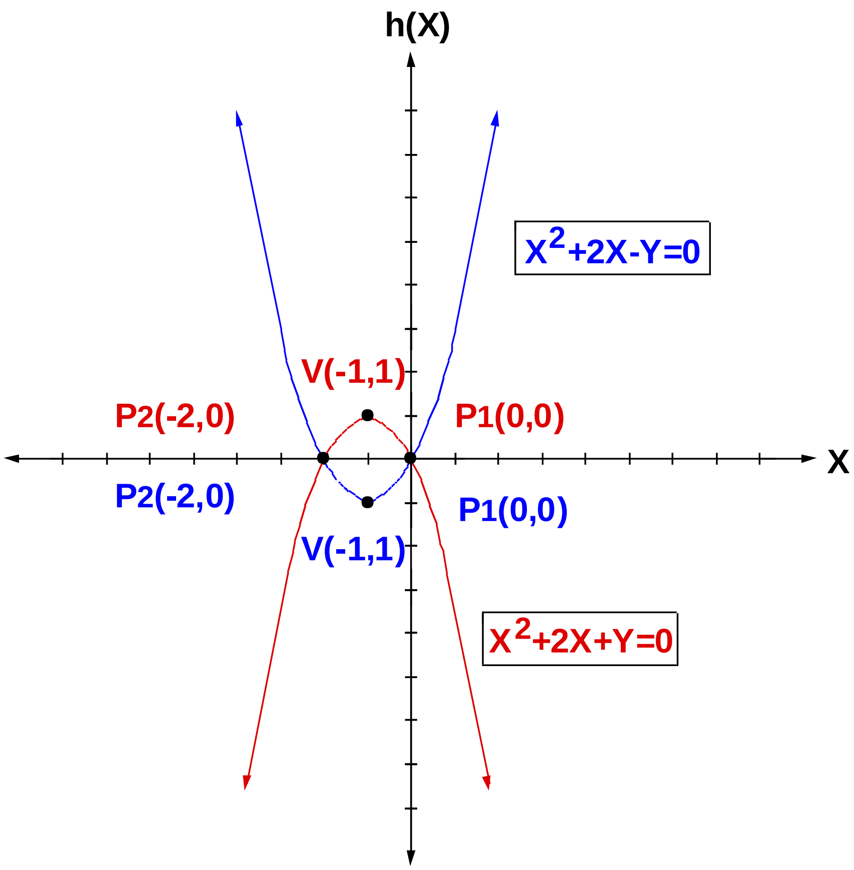


Figura 4.58

Generando la función $h(X)$**:**

En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

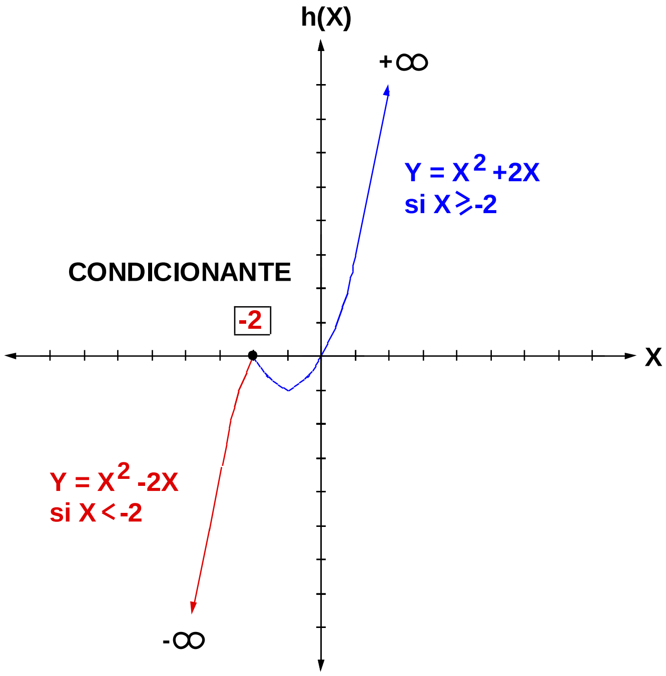


Figura 4.59

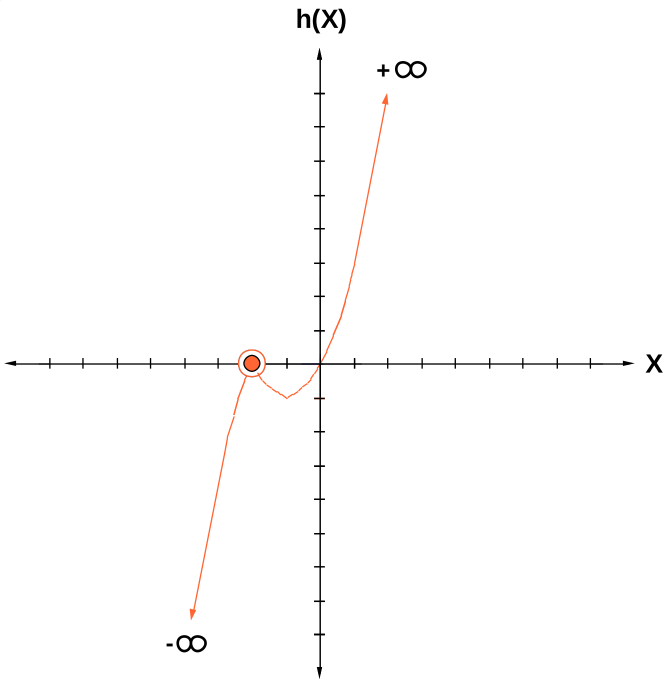


Figura 4.60

Dominio o campo de existencia de $h(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Dh(X) = X/X \in R_2$$

Rango o ámbito de $h(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Rh(X) = Y/Y \in R_2$$

(4.20) $$(X) = \frac{|X| + 2X^2}{X}$$

Aplicando la definición se tiene:

$$|X| = \begin{cases} X \quad si \quad X \geq 0 \\ -X \quad si \quad X < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:

No se requiere.

Función definida:

$$\frac{|X| + 2X^2}{X} = \begin{cases} \dfrac{X + 2X^2}{X} \quad si \quad X \geq 0 \\ \\ \dfrac{-X + 2X^2}{X} \quad si \quad X < 0 \end{cases}$$

$$\frac{|X| + 2X^2}{X} = \begin{cases} \dfrac{X(1 + 2X)}{X} \quad si \quad X \geq 0 \\ \\ \dfrac{X(-1 + 2X)}{X} \quad si \quad X < 0 \end{cases}$$

De donde:

$$\frac{|X| + 2X^2}{X} = \begin{cases} 1 + 2X \quad si \quad X \geq 0 \\ -1 + 2X \quad si \quad X < 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$\frac{|X| + 2X^2}{X} = \begin{cases} 2X + 1 & si \quad X \geq 0 \\ 2 - 1X & si \quad X < 0 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $f_1(X) = 2X + 1$	1. $Y = 2X + 1$
2. $f_2(X) = 2X - 1$	2. $Y = 2X - 1$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = 2X + 1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}/_{B} = 2$
Ecuación ordenada: $2X - Y + 1 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 1 \Longrightarrow P_1(0, 1)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -{}^{1}/_{2} \Longrightarrow P_2(-{}^{1}/_{2}, 0)$$

2. $Y = 2X - 1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}/_{B} = 2$
Ecuación ordenada: $2X - Y - 1 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -1 \Longrightarrow P_1(0, -1)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = {}^{1}/_{2} \Longrightarrow P_2({}^{1}/_{2}, 0)$$

Gráfica simultanea de ecuaciones:

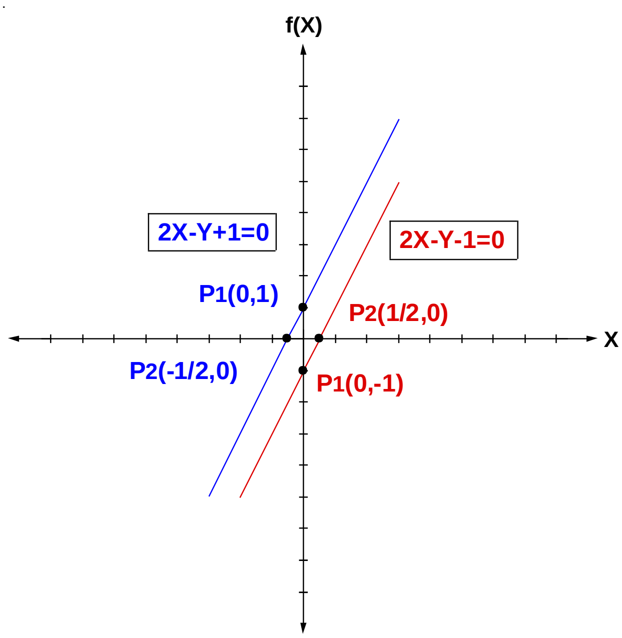


Figura 4.61

Generando la función $f(X)$:
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

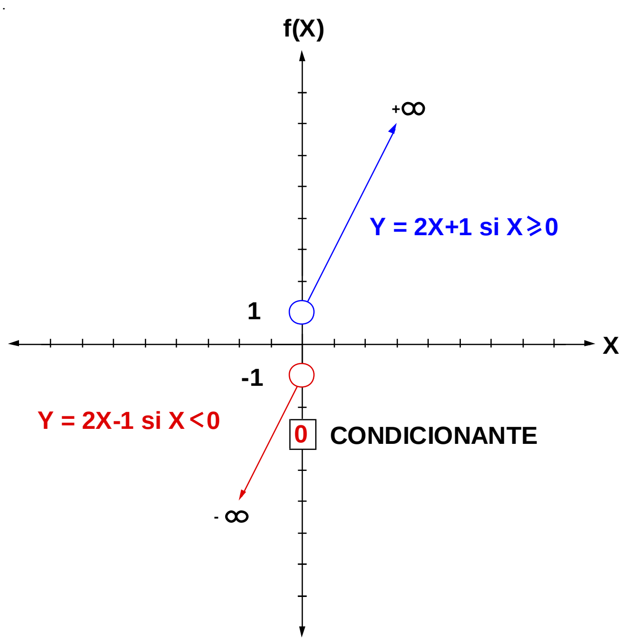


Figura 4.62

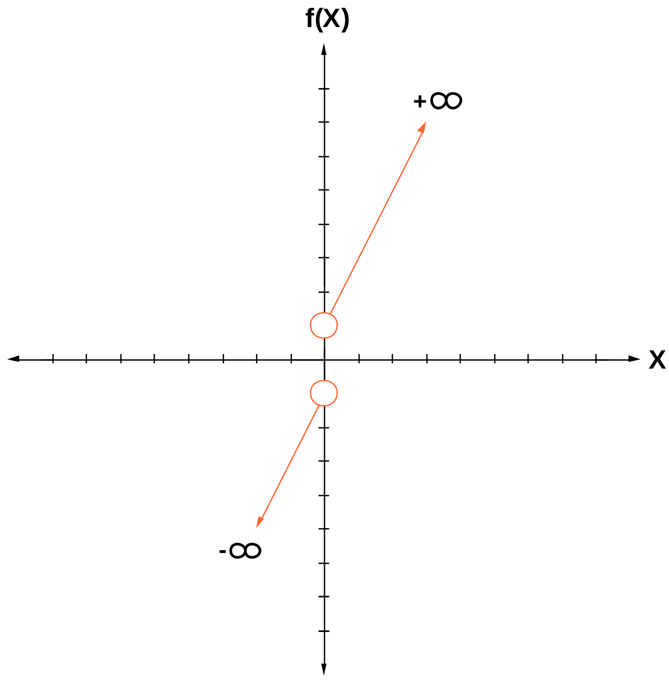


Figura 4.63

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales, excepto $X = 0$.

$$Df(X) = X/X \in R_2,\ excepto\ X = 0$$

Rango o ámbito de $f(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números reales, excepto el

intervalo comprendido entre -1 y 1,abierto.

$$Rf(X) = \{Y/Y \in R_2,\ excepto\ (-1 < Y < 1)\}$$

(4.21) $$g(X) = |X^2 - 9|$$

Aplicando la definición se tiene:

$$|X^2 - 9| = \begin{cases} X^2 - 9 & si \quad X^2 - 9 \geq 0 \\ -(X^2 - 9) & si \quad X^2 - 9 < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:

$$a)\ X^2 - 9 \quad X^2 \geq 9$$

Resolviendo

$$X \geq 3 \quad y \quad X \leq -3$$

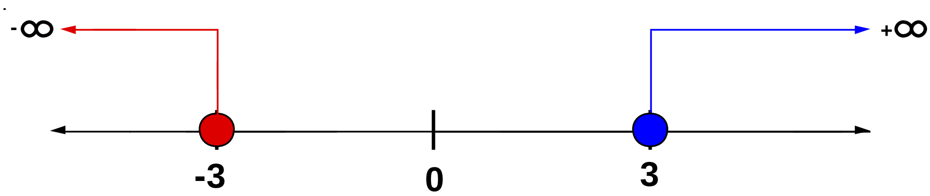


Figura 4.64

$$b) X^2 - 9 < 0 \quad X^2 < 9$$

Resolviendo

$$X < 3 \quad y \quad X > -3$$

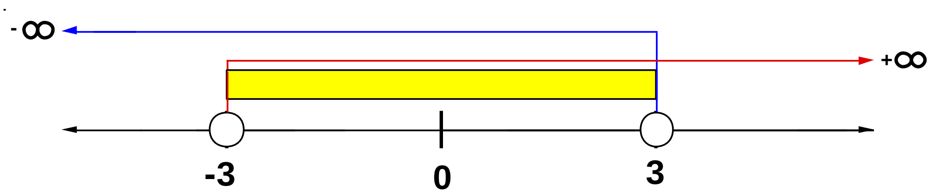


Figura 4.65

Función definida:

$$|X^2 - 9| = \begin{cases} X^2 - 9 & si \quad X \geq 3 \quad y \quad X \leq -3 \\ -X^2 + 9 & si \quad (-3 < X < 3) \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $g_1(X) = X^2 - 9$	1. $Y = X^2 - 9$
2. $g_2(X) = -X^2 + 9$	2. $Y = -X^2 + 9$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = X^2 - 9$

Grado de la ecuación: segundo grado.

Representa: una curva en R_2.

Tipo de curva: Parábola de vértice (h, k)

Características de la curva:

$V = (0, -9)$, eje coincidente con eje Y

Ecuación ordenada: $X^2 - Y - 9 = 0$ Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -9 \Longrightarrow P_1(0, -9) \quad verifica\ coordenadas\ del\ vértice.$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 3\ y\ X = -3 \Longrightarrow P_2(-3, 0), P_3(3, 0)$$

2. $Y = -X^2 - 9$

Grado de la ecuación: segundo grado.

Representa: una curva en R_2.

Tipo de curva: Parábola de vértice (h, k)

Características de la curva:

$V = (0, 9)$, eje coincidente con eje Y

Ecuación ordenada: $X^2 + Y - 9 = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 9 \Longrightarrow P_1(0, 9) \quad verifica\ coordenadas\ del\ vértice.$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 3\ y\ X = -3 \Longrightarrow P_2(-3, 0), P_3(3, 0)$$

Gráfica simultanea de ecuaciones:

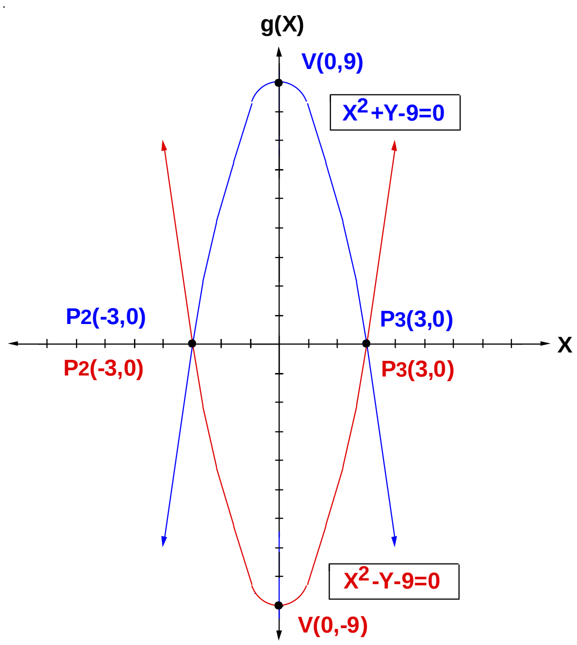


Figura 4.66

Generando la función $g(X)$, en base a los condicionantes de cada subfunción se tendrá que:

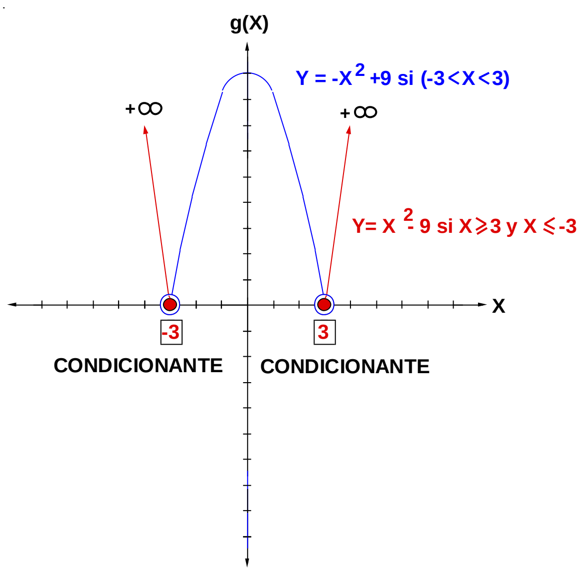


Figura 4.67

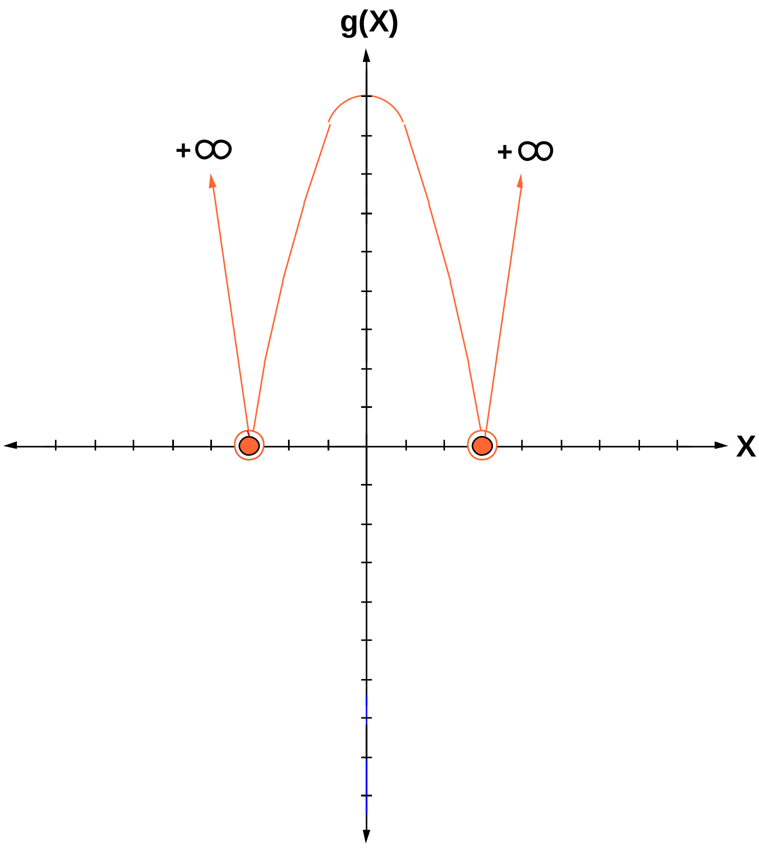


Figura 4.68

Gráfica de la función $g(X)$

Dominio o campo de existencia de $g(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Dg(X) = X/X \in R_2$$

Rango o ámbito de $g(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y sea mayor o igual que cero.

$$Rg(X) = Y/Y \geq 0$$

(4.22) $$g(X) = |\frac{X+6}{X}|$$

Aplicando la definición se tiene:

$$|\frac{X+6}{X}| = \begin{cases} \frac{X+6}{X} & si \quad \frac{X+6}{X} \geq 0 \\ \\ -(\frac{X+6}{X}) & si \quad \frac{X+6}{X} < 0 \end{cases}$$

Análisis del primer condicionante.

$$\frac{X+6}{X}$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+}$

o

b) **y** $\frac{-}{-}$

Analizando la posibilidad a:

$$X + 6 \geq 0 \quad y \quad X > 0$$

$$X \geq -6 \quad y \quad X > 0$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática.

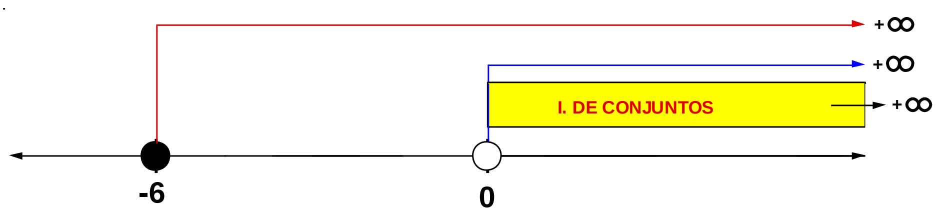


Figura 4.69

Solución a: $X > 0$
Analizando la posibilidad b:

$$X + 6 \leq 0 \quad y \quad X < 0$$

$$X \leq -6 \quad y \quad X < 0$$

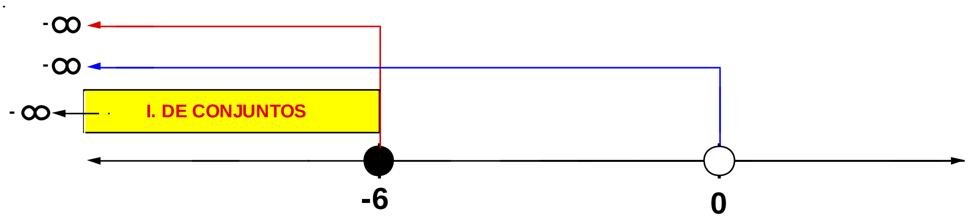


Figura 4.70

Solución b: $X \leq -6$
La solución final será:

Figura 4.71

Es decir:

$$X/X \leq -6 \quad o \quad X > 0$$

Análisis del segundo condicionante.

$$(X+6)/X < 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{-}$

o

b) **y** $\frac{-}{+}$

Analizando la posibilidad a:

$$X + 6 > 0 \quad y \quad X < 0$$

$$X > -6 \quad y \quad X < 0$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática; así como el factor del numerador debe excluir esta posibilidad puesto que se consideraría el valor condicionante dos veces, y por tanto, la función perdería sus características.

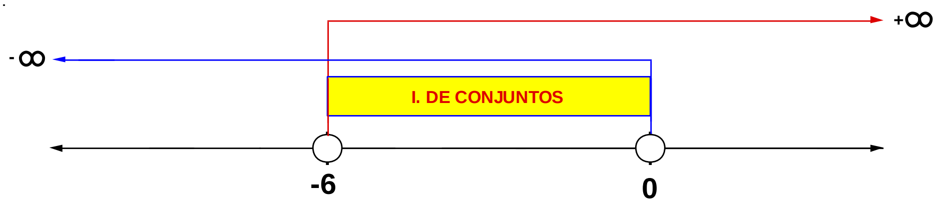


Figura 4.72

Solución a: $(-6 < X < 0)$
Analizando la posibilidad b:

$$X + 6 < 0 \quad y \quad X > 0$$

$$X < -6 \quad y \quad X > 0$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática; así como el factor del numerador debe excluir esta posibilidad puesto que se consideraría el valor condicionante dos veces, y por tanto, la función perdería sus características.

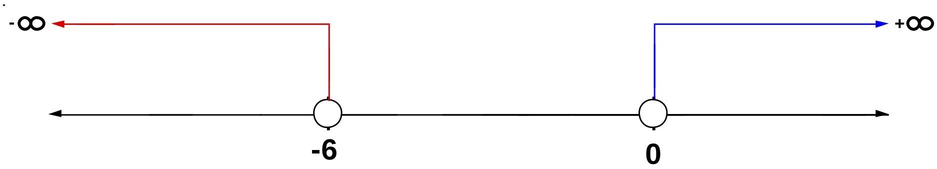


Figura 4.73

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución b: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
La solución final será:

Figura 4.74

Es decir:

$$\{X/(-6 < X < 0)\}$$

Función definida:

$$\left|\frac{X+6}{X}\right| = \begin{cases} \dfrac{X+6}{X} & si \quad X \leq -6 \; o \; X > 0 \\ -(\dfrac{X+6}{X}) & si \quad (-6 < X < 0) \end{cases}$$

Sub-funciones:

1. $g_1(X) = \dfrac{X+6}{X}$
2. $g_2(X) = -(\dfrac{X+6}{X})$

Ecuaciones:

1. $Y = \dfrac{X+6}{X}$
2. $Y = -(\dfrac{X+6}{X})$

Análisis de ecuaciones:

1. $\quad Y = \dfrac{X+6}{X}$

Ecuación ordenada: $X - XY + 6 = 0$
Grado de la ecuación: primer grado.
Características generales: al existir al menos un término cruzado (XY) implica que, se trata de una curva en R_2, y adicionalmente es una curva asintótica.
Tipo de curva: No definida.
Al no existir una identificación, implica la realización de un análisis completo de la misma.

Análisis de la curva.

1. CORTES O INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS:

   a) Con $X = 0$; $Y =$ No existe
   b) Con $Y = 0$; $X = -6 \Longrightarrow P_1(-6, 0)$ corte único.

2. ANÁLISIS DE LA SIMETRÍA:

   a) Con el eje de las abscisas NO EXISTE.
   b) Con el eje de las ordenadas NO EXISTE.
   c) Con el origen NO EXISTE.

CURVA TOTALMENTE ASIMÉTRICA.

3. ANÁLISIS DEL DOMINIO O ESTENSIÓN DE LA CURVA:

$$Y = \frac{X+6}{X}$$

Análisis de restricciones.
Sean a y b dos expresiones algebraicas se tendrá:
Cociente de dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$
Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.
Análisis: $b \neq 0$

$$\text{Por lo tanto } X \neq 0$$

De esta manera el dominio de la curva será:

$$D : X/X \in R_2, \ excepto \ X = 0$$

4. ANÁLISIS DEL RANGO O CONTRADOMINIO DE LA CURVA:

$$X = \frac{-6}{1-Y}$$

Análisis de restricciones.
Sean a y b dos expresiones algebraicas se tendrá:
Cociente de dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$
Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.
Análisis: $b \neq 0$

$$\text{Por lo tanto } Y \neq 1$$

De esta manera el rango o contradominio de la curva será:

$$R : Y/Y \in R_2, \ excepto \ Y = 1$$

5. ANÁLISIS DE ASÍNTOTAS:

De la expresión resultante del análisis del dominio se tiene:

$$Y = \frac{X+6}{X}$$

$$X = 0$$

Grado de la ecuación: primer grado.

Ecuación de la forma: $X = K$ es una asíntota vertical, eje de las ordenadas.

De la expresión resultante del análisis del rango o contradominio se tiene:

$$X = \frac{-6}{1-Y}$$

$$Y = 1$$

Grado de la ecuación: primer grado.

Ecuación de la forma: $Y = K$ es una asíntota horizontal.

$$-\frac{X+6}{X}$$

Ecuación ordenada: $X + XY + 6 = 0$

Grado de la ecuación: primer grado.

Características generales: al existir al menos un término cruzado (XY) implica que, se trata de una curva en R_2, y adicionalmente es una curva asintótica.

Tipo de curva: No definida.

Al no existir una identificación, implicaría la realización de un análisis completo de la misma como en el caso de la primera, pero resulta que su gráfica es la inversa de la anterior por lo que no se requiere.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

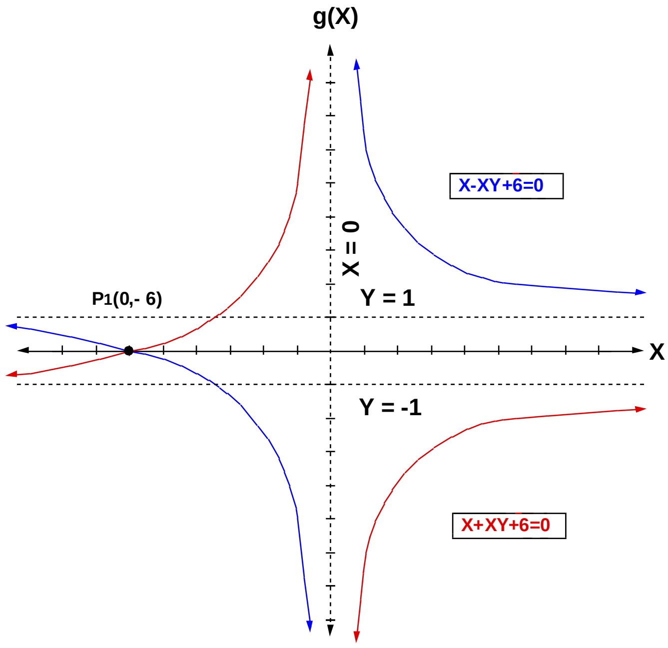


Figura 4.75

Generando la función $g(X)$, en base a los condicionantes de cada subfunción se tendrá que:

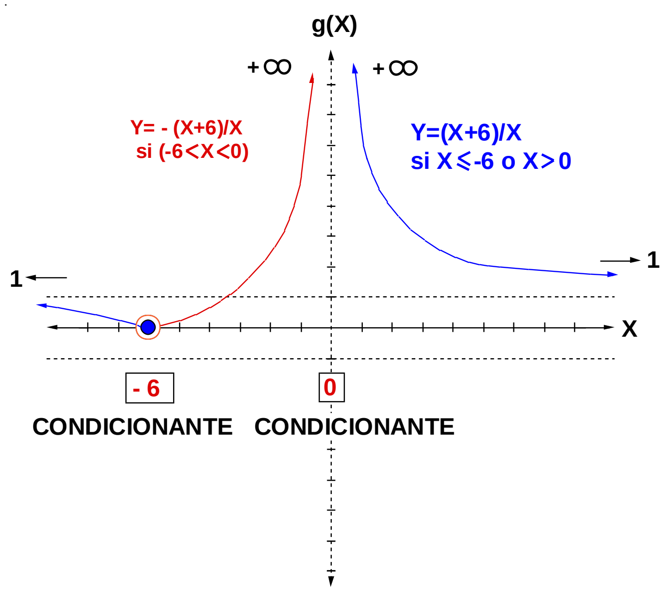


Figura 4.76

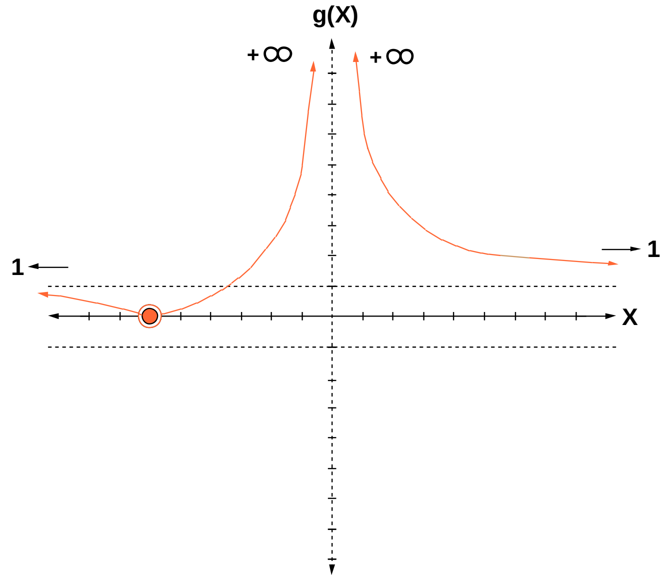


Figura 4.77

Dominio o campo de existencia de $g(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales, excepto $X = 0$.

$$Dg(X) = X/X \in R_2, \ excepto \ X = 0$$

Rango o ámbito de $g(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y sea mayor o igual que cero.

$$Rg(X) = Y/Y \geq 0$$

(4.23) $$f(X) = \frac{|X|}{X+3}$$

Aplicando la definición se tiene:

$$|X| = \begin{cases} X \quad si \quad X \geq 0 \\ -X \quad si \quad X < 0 \end{cases}$$

Función definida:

$$\frac{|X|}{X+3} = \begin{cases} \dfrac{X}{X+3} & si \quad X \geq 0 \\ \\ \dfrac{-X}{X+3} & si \quad X < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:
No se requiere.

Sub-funciones:
1. $f_1(X) = {}^{X}/_{X+3}$
2. $f_2(X) = -({}^{-X}/_{X+3})$

Ecuaciones:
1. $Y = {}^{X}/_{X+3}$
2. $Y = -({}^{-X}/_{X+3})$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = \dfrac{X}{X+3}$

Ecuación ordenada: $X - XY - 3Y = 0$
Grado de la ecuación: primer grado.
Características generales: al existir al menos un término cruzado (XY) implica que, se trata de una curva en R_2, y adicionalmente es una curva asintótica.
Tipo de curva: No definida.
Al no existir una identificación, implica la realización de un análisis completo de la misma.

Análisis de la curva.

1. CORTES O INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS

   a) *Con* $X = 0$; $Y = 0 \Longrightarrow P_1(0,0)$
   b) *Con* $Y = 0$; $X = 0 \Longrightarrow$ *corte único.*

2. ANÁLISIS DE LA SIMETRÍA

   a) Con el eje de las abscisas NO EXISTE
   b) Con el eje de las ordenadas NO EXISTE
   c) Con el origen NO EXISTE

CURVA TOTALMENTE ASIMÉTRICA.

3. ANÁLISIS DEL DOMINIO O ESTENSIÓN DE LA CURVA

$$Y = \frac{X}{X+3}$$

Análisis de restricciones.
Sean a y b dos expresiones algebraicas se tendrá:
Cociente de dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$
Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.
Análisis: $b \neq 0$
Por lo tanto $X + 3 \neq 0$

$$X \neq -3$$

De esta manera el dominio de la curva será:

$$D : \{X/X \in R_2,\ excepto\ X = -3\}$$

4. - ANÁLISIS DEL RANGO O CONTRADOMINIO DE LA CURVA:

$$X = \frac{3Y}{1-Y}$$

Análisis de restricciones.
Sean a y b dos expresiones algebraicas se tendrá:
Cociente de dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$
Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.
Análisis:

$$b \neq 0$$

Por lo tanto $Y \neq 1$
De esta manera el rango o contradominio de la curva será:

$$R : Y/Y \in R_2,\ excepto\ Y = 1$$

4. - ANÁLISIS DE ASÍNTOTAS

De la expresión resultante del análisis del dominio se tiene:

$$Y = \frac{X}{X+3}$$

$$X + 3 = 0$$

$$X = -3$$

Grado de la ecuación: primer grado.

Ecuación de la forma: $X = K$ es una asíntota vertical.

De la expresión resultante del análisis del rango o contradominio se tiene:

$$X = \frac{3Y}{1-Y}$$

$$Y = 1$$

Grado de la ecuación: primer grado.

Ecuación de la forma: $Y = K$ es una asíntota horizontal.

2. $\dfrac{-X}{X+3}$

Ecuación ordenada: $X + XY + 3Y = 0$

Grado de la ecuación: primer grado.

Características generales: al existir al menos un término cruzado (XY) implica que, se trata de una curva enR_2, y adicionalmente es una curva asintótica.

Tipo de curva: No definida.

Al no existir una identificación, implicaría la realización de un análisis completo de la misma como en el caso de la primera, pero resulta que su gráfica es la inversa de la anterior por lo que no se requiere.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

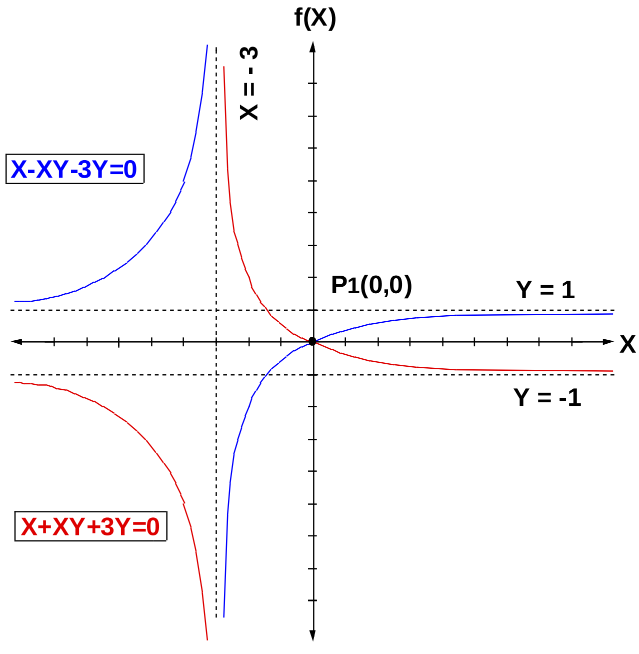


Figura 4.78

Generando la función $f(X)$, en base a los condicionantes de cada subfunción se tendrá que:

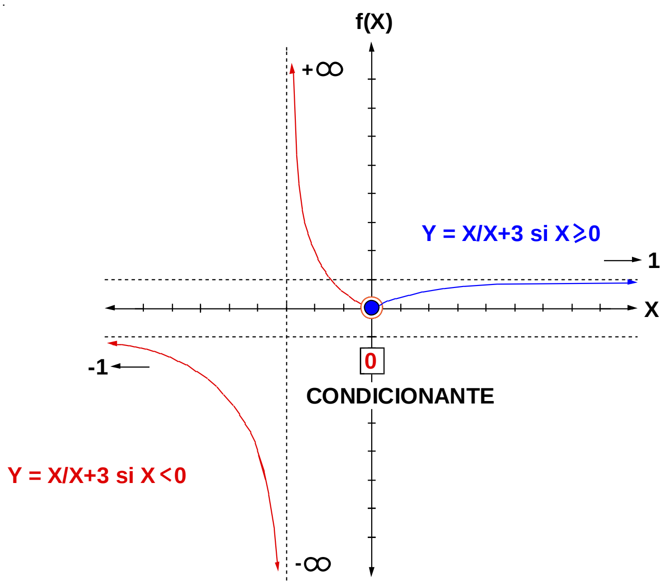


Figura 4.79

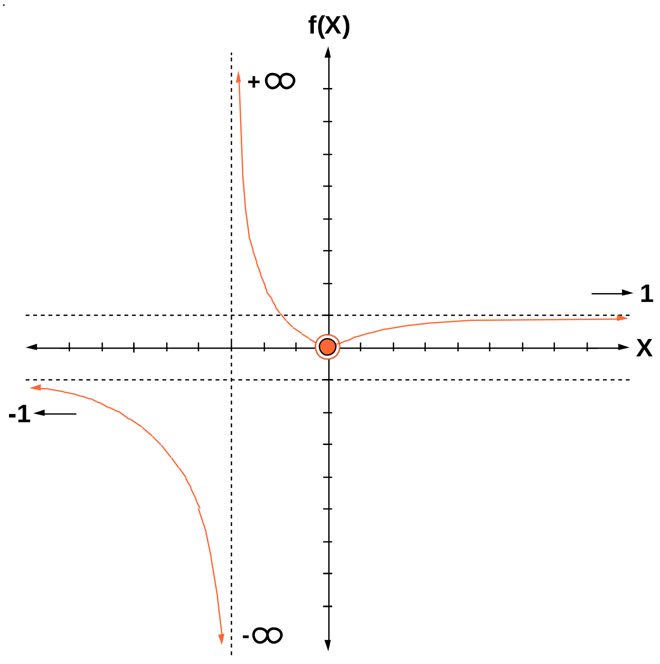


Figura 4.80

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales, excepto $X = -3$

$$Df(X) = X/X \in R_2,\ excepto\ X = -3$$

Rango o ámbito de $f(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números reales,excepto el intervalo comprendido entre 0 y -1,excluido el 0 e incluido el -1

$$Rf(X) = \{Y/Y \in R_2,\ excepto\ [-1 \leq Y < 0)\}$$

(4.24) $$h(X) = \mid \frac{X-1}{X+4} \mid$$

Aplicando la definición se tiene:

$$|\frac{X-1}{X+4}| = \begin{cases} \frac{X-1}{X+4} & si \quad \frac{X-1}{X+4} \geq 0 \\ \\ -(\frac{X-1}{X+4}) & si \quad \frac{X-1}{X+4} < 0 \end{cases}$$

Análisis del primer condicionante.

$$\frac{X-1}{X+4} \geq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+}$

o

b) **y** $\frac{-}{-}$

Analizando la posibilidad a:

$$X - 1 \geq 0 \quad y \quad X + 4 > 0$$

$$X \geq 1 \quad y \quad X > -4$$

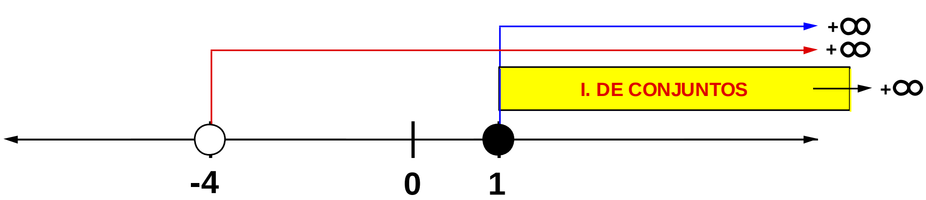


Figura 4.81

Solución a:$X \geq 1$
Analizando la posibilidad b:

$$X - 1 \leq 0 \quad y \quad X + 4 < 0$$

$$X \leq 1 \quad y \quad X < -4$$

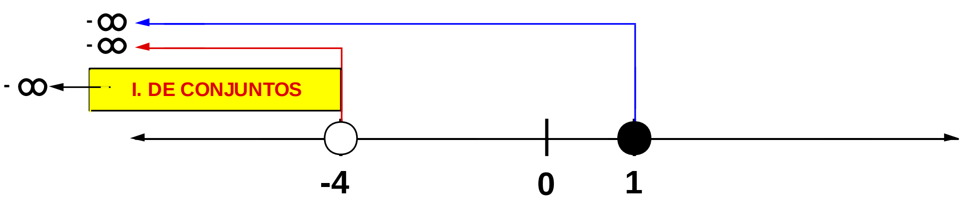


Figura 4.82

Solución b: $X < -4$
La solución final será:

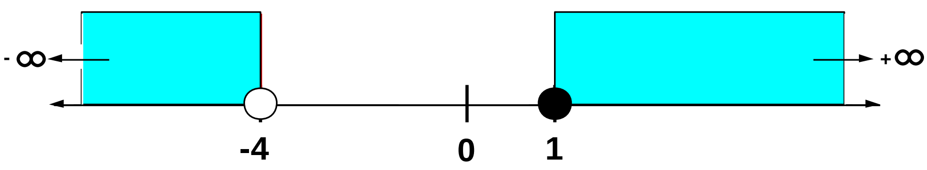


Figura 4.83

Es decir:

$$\{X/X < -4 \quad o \quad X \geq 1\}$$

Análisis del segundo condicionante.

$$\frac{X-1}{X+4} < 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{-}$

o

b) **y** $\frac{-}{+}$

Analizando la posibilidad a:

$$X - 1 > 0 \quad y \quad X + 4 < 0$$

$$X > 1 \quad y \quad X < -4$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática; así como el factor del numerador debe excluir esta posibilidad puesto que se consideraría el valor condicionante dos veces, y por tanto, la función perdería sus características.

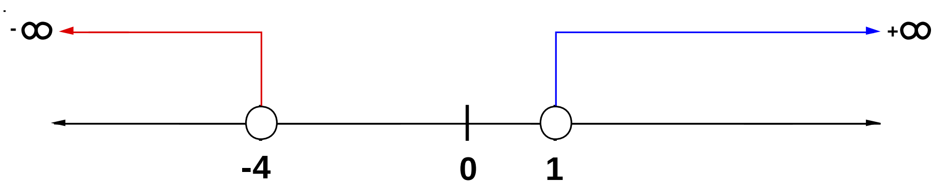


Figura 4.84

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución a: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
Analizando la posibilidad b:

$$X - 1 < 0 \quad y \quad X + 4 > 0$$

$$X < 1 \quad y \quad X > -4$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática; así como el factor del numerador debe excluir esta posibilidad puesto que se consideraría el valor condicionante dos veces, y por tanto, la función perdería sus características.

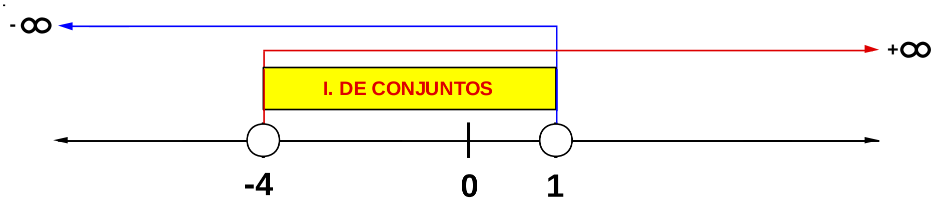


Figura 4.85

Solución b: $(-4 < X < 1)$
La solución final será:

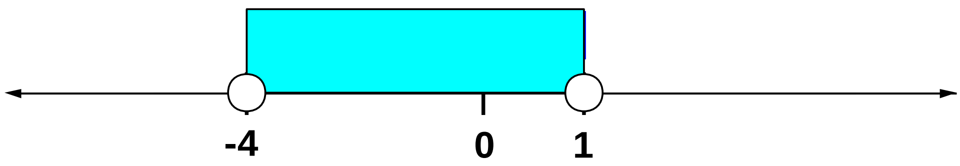


Figura 4.86

Es decir:

$$\{X/(-4 < X < 1)\}$$

Función definida:

$$|\frac{X-1}{X+4}| = \begin{cases} \dfrac{X-1}{X+4} & si \quad X < -4 \quad o \quad X \geq 1 \\ \\ -(\dfrac{X-1}{X+4}) & si \quad (-4 < X < 1) \end{cases}$$

Sub-funciones:

1. $h_1(X) = \dfrac{X-1}{X+4}$
2. $h_2(X) = -(\dfrac{X-1}{X+4})$

Ecuaciones:

1. $Y = \dfrac{X-1}{X+4}$
2. $Y = -(\dfrac{X-1}{X+4})$

Análisis de ecuaciones:

$$1. \quad Y = \frac{X-1}{X+4}$$

Ecuación ordenada: $X - XY - 4Y - 1 = 0$
Grado de la ecuación: primer grado.
Características generales: al existir al menos un término cruzado (XY) implica que, se trata de una curva en R_2, y adicionalmente es una curva asintótica.
Tipo de curva: No definida.
Al no existir una identificación, implica la realización de un análisis completo de la misma.
Análisis de la curva.

1. CORTES O INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS
   a) $Con\ X = 0;\ Y = -\frac{1}{4} \Longrightarrow P_1(0, -\frac{1}{4})$
   b) $Con\ Y = 0;\ X = 1 \Longrightarrow P_2(1, 0)$
2. ANÁLISIS DE LA SIMETRÍA
   a) Con el eje de las abscisas NO EXISTE.
   b) Con el eje de las ordenadas NO EXISTE
   c) Con el origen NO EXISTE.

ANÁLISIS DEL DOMINIO O ESTENSIÓN DE LA CURVA:

3. ANÁLISIS DEL DOMINIO O ESTENSIÓN DE LA CURVA

$$Y = \frac{X - 1}{X + 4}$$

Análisis de restricciones.
Sean a y b dos expresiones algebraicas se tendrá:
Cociente de dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$
Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.
Análisis: $b \neq 0$
Por lo tanto $X + 4 \neq 0$

$$X \neq -4$$

De esta manera el dominio de la curva será:

$$D : \{X/X \in R_2,\ excepto\ X = -4\}$$

4. ANÁLISIS DEL RANGO O CONTRADOMINIO DE LA CURVA

$$X = \frac{4Y+1}{1-Y}$$

Análisis de restricciones.
Sean a y b dos expresiones algebraicas se tendrá:
Cociente de dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$
Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.
Análisis: $b \neq 0$
Por lo tanto $Y \neq 1$
De esta manera el rango o contradominio de la curva será:

$$R : Y/Y \in R_2,\ excepto\ Y = 1$$

5. ANÁLISIS DE ASÍNTOTAS

De la expresión resultante del análisis del dominio se tiene:

$$Y = \frac{X-1}{X+4}$$

$$X + 4 = 0$$

$$X = -4$$

Grado de la ecuación: primer grado.
Ecuación de la forma: X=K es una asíntota vertical.
De la expresión resultante del análisis del rango o contradominio se tiene:

$$X = \frac{4Y+1}{1-Y}$$

$$Y = 1$$

Grado de la ecuación: primer grado.
Ecuación de la forma: Y=K es una asíntota horizontal.

$$Y = -\frac{X-1}{X+4}$$

Ecuación ordenada: $X + XY + 4Y - 1 = 0$
Grado de la ecuación: primer grado.
Características generales: al existir al menos un término cruzado (XY) implica que, se trata de una curva en R_2, y adicionalmente es una curva asintótica.

Tipo de curva: No definida.

Al no existir una identificación, implicaría la realización de un análisis completo de la misma como en el caso de la primera, pero resulta que su gráfica es la inversa de la anterior por lo que no se requiere.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

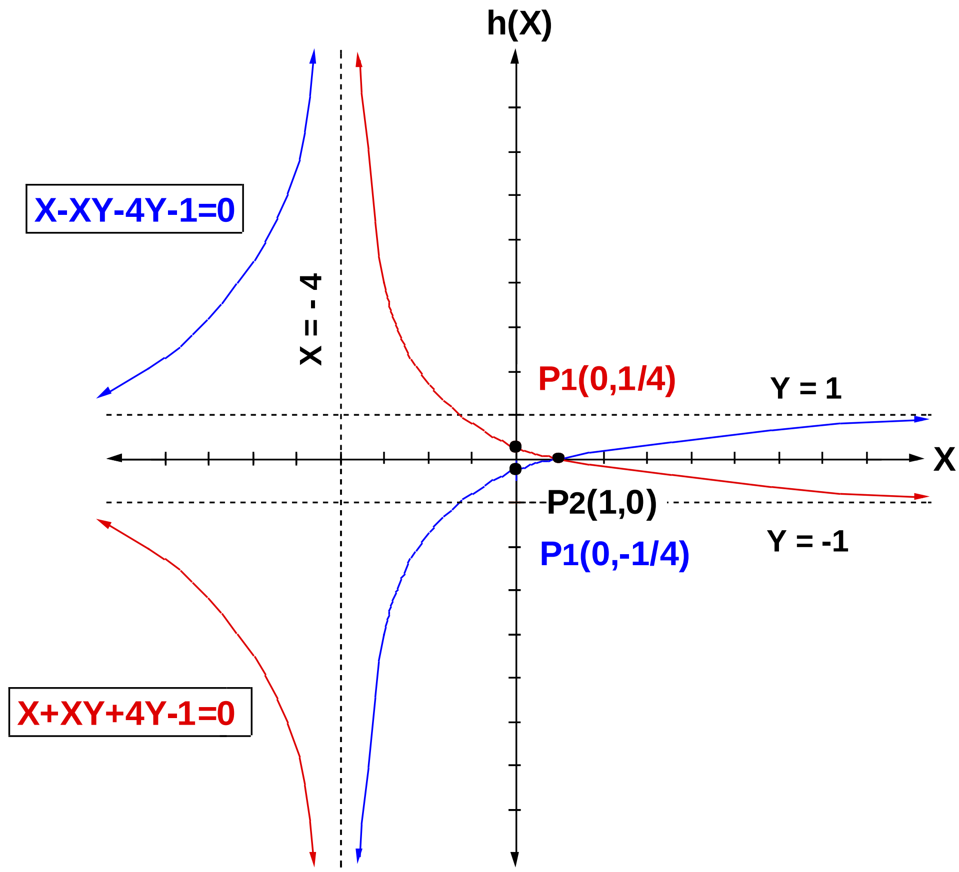


Figura 4.87

Generando la función $h(X)$, en base a los condicionantes de cada subfunción se tendrá que:

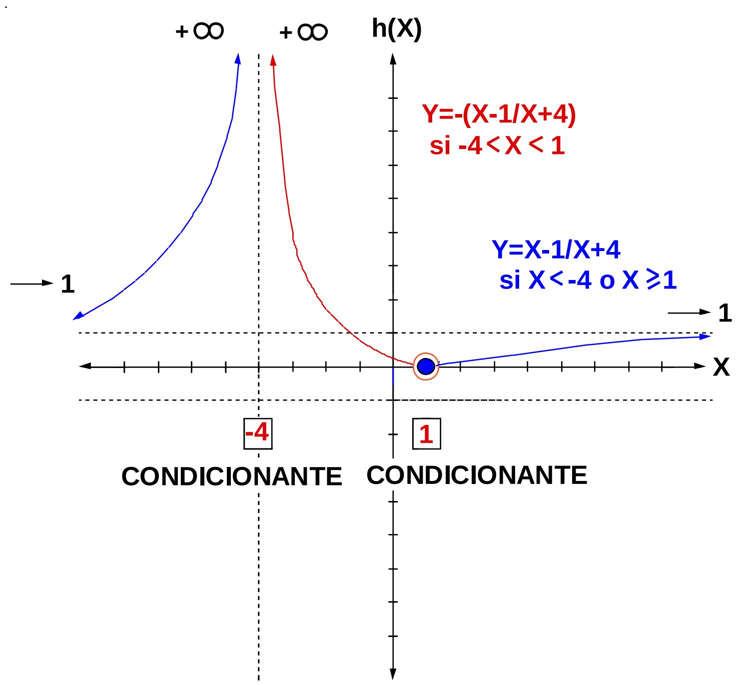


Figura 4.88

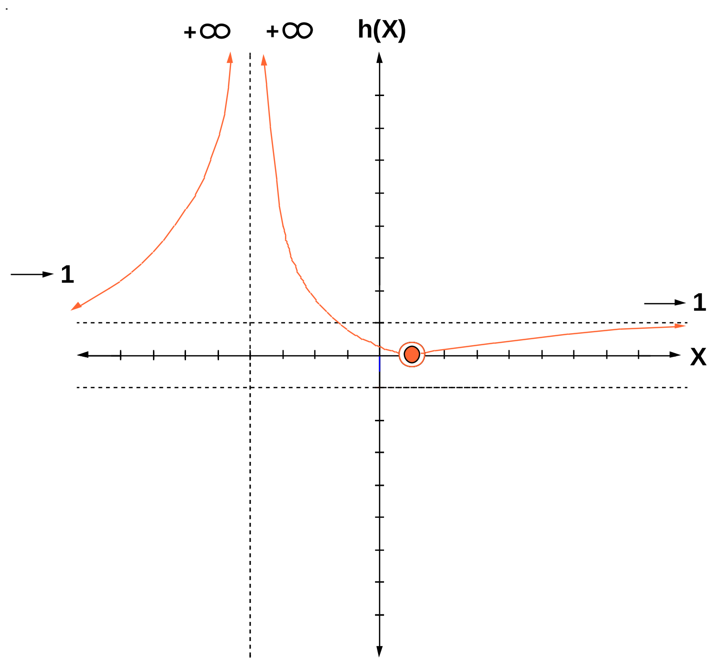


Figura 4.89

Dominio o campo de existencia de $h(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales, excepto $X = -4$

$$Dh(X) = X/X \in R_2, \ excepto \ X = -4$$

Rango o ámbito de h(X):

Conjunto de valores de Y tal que Y sea mayor o igual que cero.

$$Rh(X) = Y/Y \geq 0$$

(4.25)
$$f(X) = \frac{|X^2 - X - 20|}{|X + 2|}$$

Aplicando la definición se tiene:

$$|X^2 - X - 20| = \begin{cases} |X^2 - X - 20| & si \quad X^2 - X - 20 \geq 0 \\ -(X^2 - X - 20) & si \quad X^2 - X - 20 < 0 \end{cases}$$

Análisis del primer condicionante.

$$X^2 - X - 20 \geq 0$$

Factorando

$$(X - 5)(X + 4) \geq 0$$

Posibilidades:

Posibilidades

a) **y** $\begin{array}{c} + \\ \hline + \end{array}$

o

b) **y** $\begin{array}{c} - \\ \hline - \end{array}$

Analizando la posibilidad a:

$$X - 5 \geq 0 \quad y \quad X + 4 \geq 0$$

$$X \geq 5 \quad y \quad X \geq -4$$

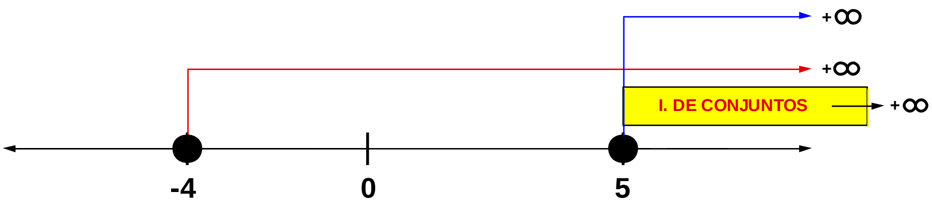


Figura 4.90

Solución a: $X \geq 5$
Analizando la posibilidad b:

$$X - 5 \leq 0 \quad y \quad X + 4 \leq 0$$

$$X \leq 5 \quad y \quad X \leq -4$$

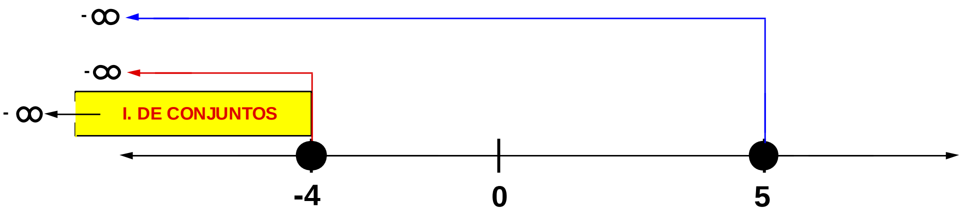


Figura 4.91

Solución a:$X \leq -4$
La solución final será:

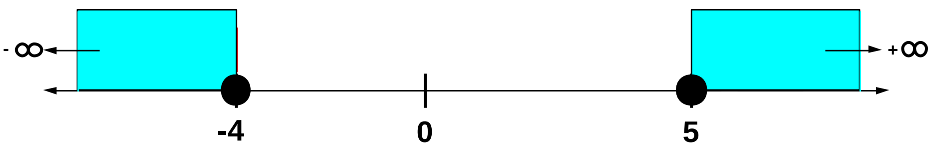


Figura 4.92

Es decir:

$$\{X/X \leq -4 \quad o \quad X \geq 5\}$$

Análisis del segundo condicionante.

$$X^2 - X - 20 < 0$$

Factorando:

$$(X-5)(X+4)<0$$

Posibilidades:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{-}$

o

b) **y** $\frac{-}{+}$

Analizando la posibilidad a:

$$X-5>0 \quad y \quad X+4<0$$

$$X>5 \quad y \quad X<-4$$

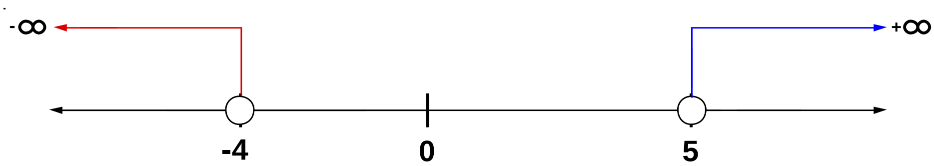


Figura 4.93

No existe intersección de conjuntos, por lo tanto:
Solución a: $\{\phi\}$, es decir conjunto vacío.
Analizando la posibilidad b:

$$X-5<0 \quad y \quad X+4>0$$

$$X<5 \quad y \quad X>-4$$

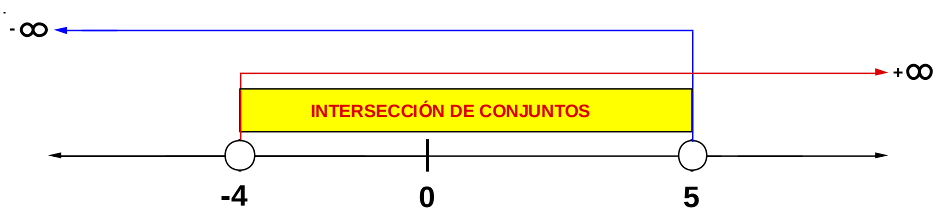


Figura 4.94

La solución final será:

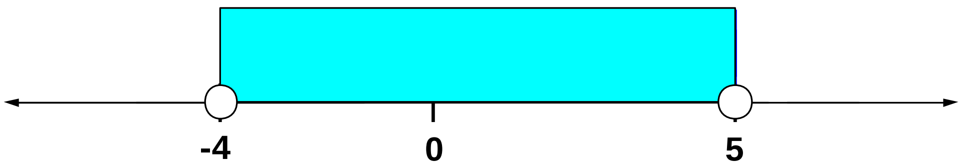


Figura 4.95

Es decir:

$$\{X/(-4 < X < 5)\}$$

Función definida:

$$\frac{|X^2 - X - 20|}{X+2} = \begin{cases} \dfrac{X^2 - X - 20}{X+2} & si \quad X \leq -4 \quad o \quad X \geq 5 \\ -(\dfrac{X^2 - X - 20}{X+2}) & si \quad (-4 < X < 5) \end{cases}$$

Sub-funciones:

1. $f_1(X) = \dfrac{X^2 - X - 20}{X+2}$
2. $f_2(X) = -(\dfrac{X^2 - X - 20}{X+2})$

Ecuaciones:

1. $Y = \dfrac{X^2 - X - 20}{X+2}$
2. $Y = -(\dfrac{X^2 - X - 20}{X+2})$

Análisis de ecuaciones:

$$1. \quad Y = \frac{X^2 - X - 20}{X+2}$$

Ecuación ordenada: $X^2 - XY - X - 2Y - 20 = 0$
Grado de la ecuación: segundo grado.
Características generales: curva en R_2, y adicionalmente es una curva asintótica.
Tipo de curva: No definida.
Al no existir una identificación, implica la realización de un análisis completo de la misma.
Análisis de la curva.

1. CORTES O INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS

a) $Con\ X = 0;\ Y = -10 \Longrightarrow P_1(0, -10)$

b) $Con\ Y = 0;\ X = 5 \quad y \quad X = -4 \Longrightarrow P_2(5, 0) \quad y \quad P_3(-4, 0)$

2. ANÁLISIS DE LA SIMETRÍA

a) Con el eje de las abscisas NO EXISTE.

b) Con el eje de las ordenadas NO EXISTE.

c) Con el origen NO EXISTE.

CURVA TOTALMENTE ASIMÉTRICA.

3. ANÁLISIS DEL DOMINIO O ESTENSIÓN DE LA CURVA

Análisis de restricciones.
Sean a y b dos expresiones algebraicas se tendrá:
Cociente de dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$
Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.
Análisis: $b \neq 0$
Por lo tanto $X + 2 \neq 0$
$X \neq -2$
De esta manera el dominio de la curva será:

$$D : X/X \in R_2,\ excepto\ X = -2$$

4. ANÁLISIS DEL RANGO O CONTRADOMINIO DE LA CURVA

Ecuación ordenada: $X^2 - XY - X - 2Y - 20 = 0$
Agrupando:

$$X^2 + X(-Y - 1) - (2Y + 20) = 0$$

Aplicando artificio matemático se tiene:
$a = 1$

$b = (-Y - 1)$

$c = -(2Y + 20)$

$$x = \frac{Y + 1 \pm \sqrt{(-Y - 1)^2 - 4[-(2Y + 20)]}}{2}$$

$$x = \frac{Y + 1 \pm \sqrt{Y^2 + Y + 1 + 8Y + 80}}{2}$$

$$x = \frac{Y + 1 \pm \sqrt{Y^2 + 9Y + 81}}{2}$$

Analizando restricciones:

$$Y^2 + 9Y + 81 \geq 0$$

Como la expresión no es factorizable, se aplica la fórmula general nuevamente:

$a = 1$, $b = 9$, $c = 81$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4(81)}}{2}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 324}}{2}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{-243}}{2}$$

Obsérvese que, se obtuvo un discriminante negativo, aparentemente significaría la no existencia de rango, sin embargo lo que indica es que la expresión $Y^2 + 9Y + 81$ no puede ser negativa, por lo tanto el rango sería el conjunto infinito de los números reales.

$$R : \{Y/Y \in R_2\}$$

5. ANÁLISIS DE ASÍNTOTAS

De la expresión resultante del análisis del dominio se tiene:

$$Y = \frac{X^2 - X - 20}{X + 2}$$

$$X + 2 = 0$$

$$X = -2$$

Grado de la ecuación: primer grado
Ecuación de la forma: $X = K$ es una asíntota vertical.

De la expresión resultante del análisis del rango o contradominio se tiene:

$$x = \frac{Y + 1 \pm \sqrt{Y^2 + 9Y + 81}}{2}$$

No existen asíntotas horizontales.

$$2. \qquad -(\frac{X^2 - X - 20}{X + 2})$$

Ecuación ordenada: $X^2 + XY - X + 2Y - 20 = 0$

Grado de la ecuación: segundo grado.

Características generales: curva en R_2, y adicionalmente es una curva asintótica.

Tipo de curva: No definida.

Al no existir una identificación, implicaría la realización de un análisis completo de la misma como en el caso de la primera, pero resulta que su gráfica es la inversa de la anterior por lo que no se requiere.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

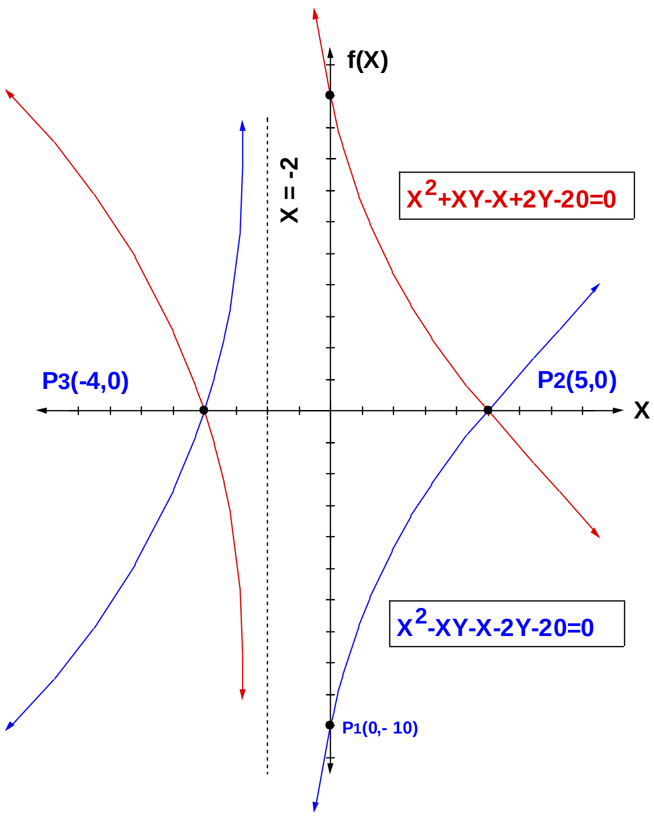


Figura 4.96

Generando la función $f(X)$, en base a los condicionantes de cada subfunción se tendrá que:

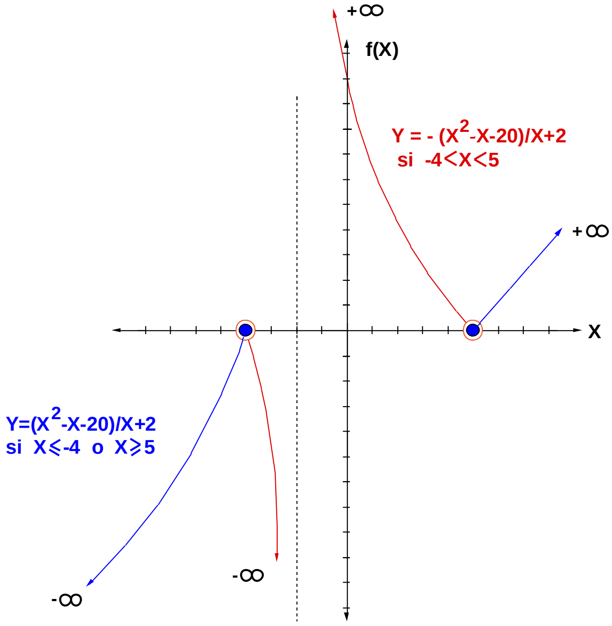


Figura 4.97

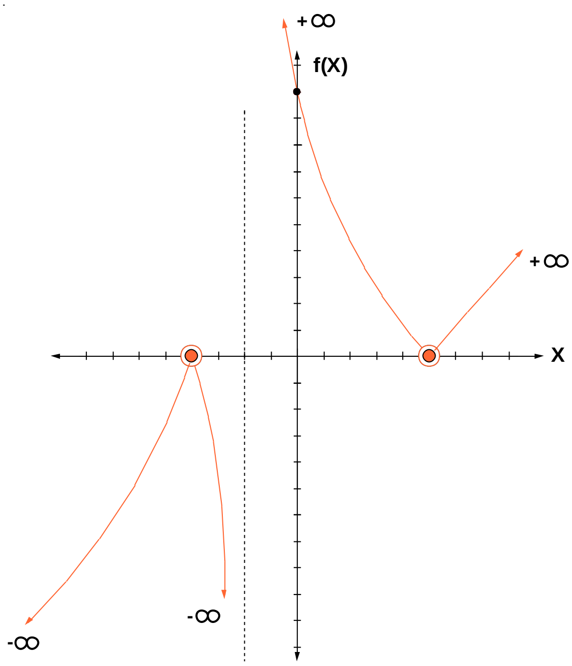


Figura 4.98

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales, excepto $X = -2$

$$Df(X) = X/X \in R_2, \ excepto \ X = -2$$

Rango o ámbito de $f(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Rf(X) = Y/Y \in R_2$$

4.3. Función parte entera de "X"

4.3.1. Definición

La función parte entera de "X" es un tipo especial de función compuesta, la cual está constituida por un número "n" de "sub-funciones" de "X", cada uno de estos elementos constitutivos de la función principal a su vez, como es característico de una función compuesta, está acompañado de un determinado "condicionante o condicionamiento" de tal manera que al concluir el análisis, cada una de las "sub-funciones" aportará a la generación de una función en R_2.

La función parte entera de "X", está denotada como sigue:

$$[[X]]$$

Es decir:

$$f(X) = [[X]]$$

Se la puede definir como el mayor entero que es menor o igual que "X".

En otras palabras la función hace corresponder a cada número real un número entero inmediatamente inferior, o igual a ese número.

Obsérvese a continuación ejemplos que aclaren la definición

$[[0,5]]$

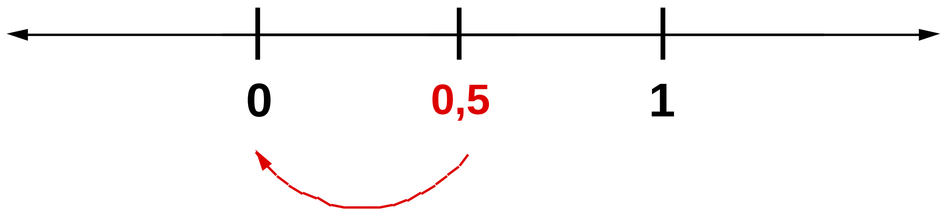


Figura 4.99

$$[[0,5]] = 0$$

$[[1,7]]$

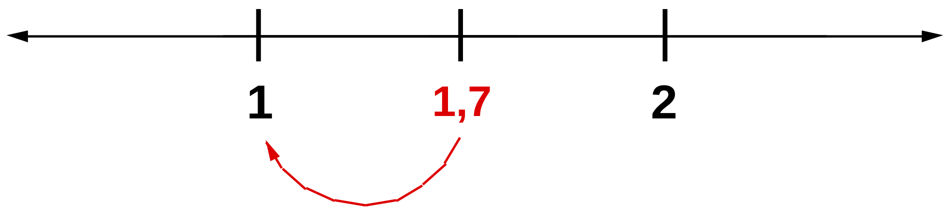


Figura 4.100

$$[[1,7]] = 1$$

$[[-2,6]]$

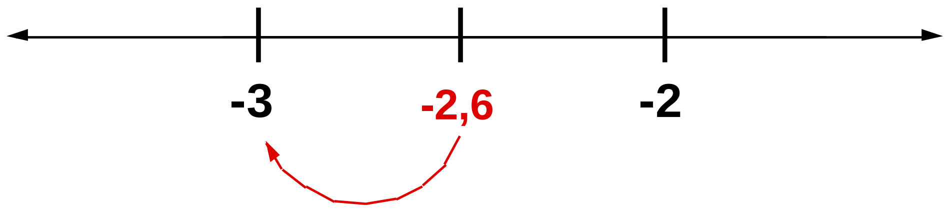


Figura 4.101

$$[[-2,6]] = -3$$

$[[-0,23]]$

Figura 4.102

$$[[-0,23]] = -1$$

$[[3]]$

Figura 4.103

$$[[3]] = 3$$

$[[-3]]$

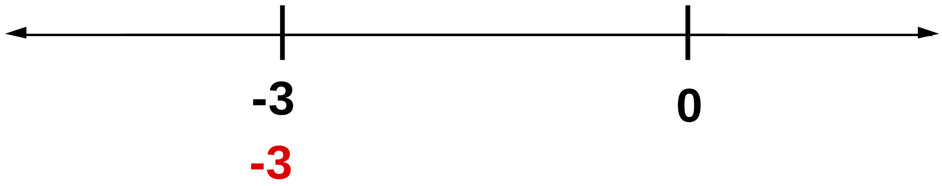


Figura 4.104

$$[[-3]] = -3$$

Una expresión matemática que expresa genéricamente el hecho es la siguiente.

$$[n \leq X < n + 1)$$

$$[[X]] = n$$

Si "X" representa un número real, comprendido entre dos enteros consecutivos n y $n+1$, tal que "X" puede ser mayor o igual que n, entonces la parte entera de "X", será igual al extremo inferior n, es decir:

$$[[X]] = n$$

Como características principales de una función de esta naturaleza se puede anotar:

1. Carece de Simetría.
2. Carece de Monotonía.
3. Es una función eminentemente discontinua.

Para realizar el estudio de una función parte entera de "X", se recomienda de manera arbitraria escoger un rango de análisis, el cual se sugiere podrá ser entre $[-3\ y\ 3)$.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Determinar el dominio, rango y trazar la gráfica para las funciones definidas por:

Se dará inicio analizando en primer término la definición.

$$f(X) = [[X]] \tag{4.26}$$

Rango sugerido de análisis $[-3\ y\ 3)$.

$[n \leq X < +1)$

Intervalos (Condicionantes)	$[[X]]$	**Subfunciones**	**Ecuaciones**
$-3 \leq X > -2$	-3	$f_1(X) = -3$	$Y = -3$
$-2 \leq X < -1$	-2	$f_2(X) = -2$	$Y = -2$
$-1 \leq X < 0$	-1	$f_3(X) = -1$	$Y = -1$
$0 \leq X < 1$	0	$f_4(X) = 0$	$Y = 0$
$1 \leq X < 2$	1	$f_5(X) = 1$	$Y = 1$
$2 \leq X < 3$	2	$f_6(X) = 2$	$Y = 2$

Análisis de ecuaciones:

Se tomará la primera ecuación para su análisis.

$$1. \quad Y = -3$$

Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.
Como se podrá apreciar todas las ecuaciones restantes tienen la misma estructura, por lo que pertenecen a la misma familia de rectas, es decir $Y = K$ de pendiente 0, rectas paralelas.
Gráfica simultanea de ecuaciones:

.

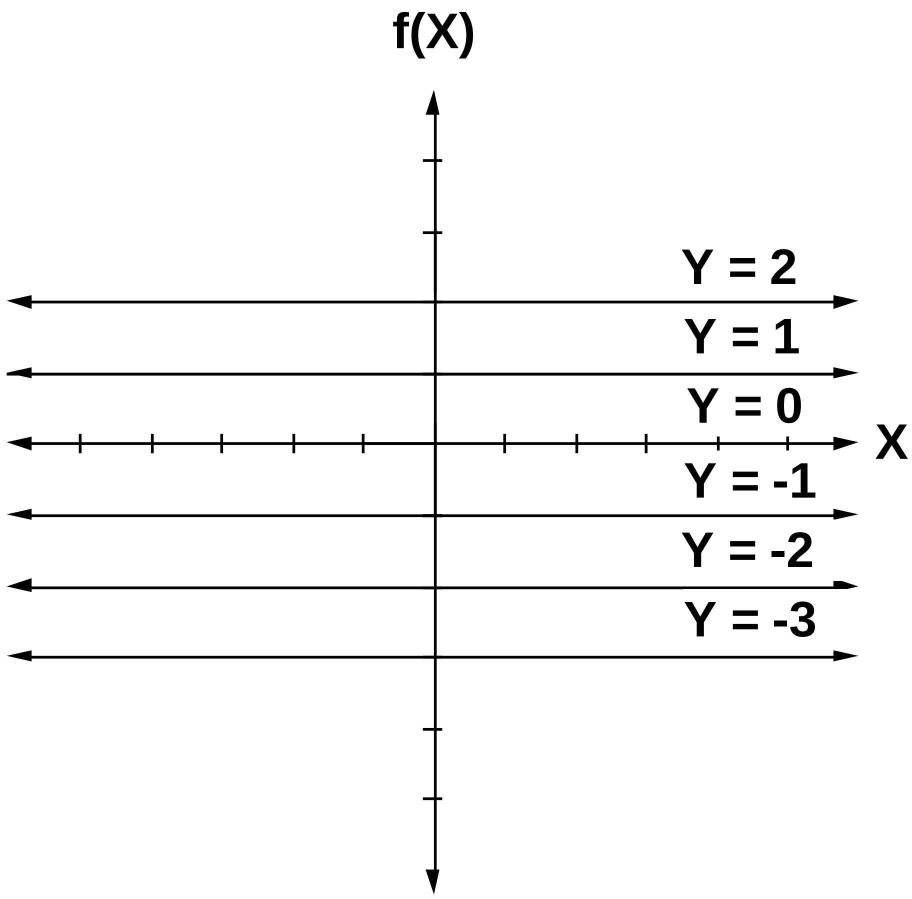


Figura 4.105

Generando la función $f(X)$, en base a los condicionantes de cada subfunción se tendrá que:

.

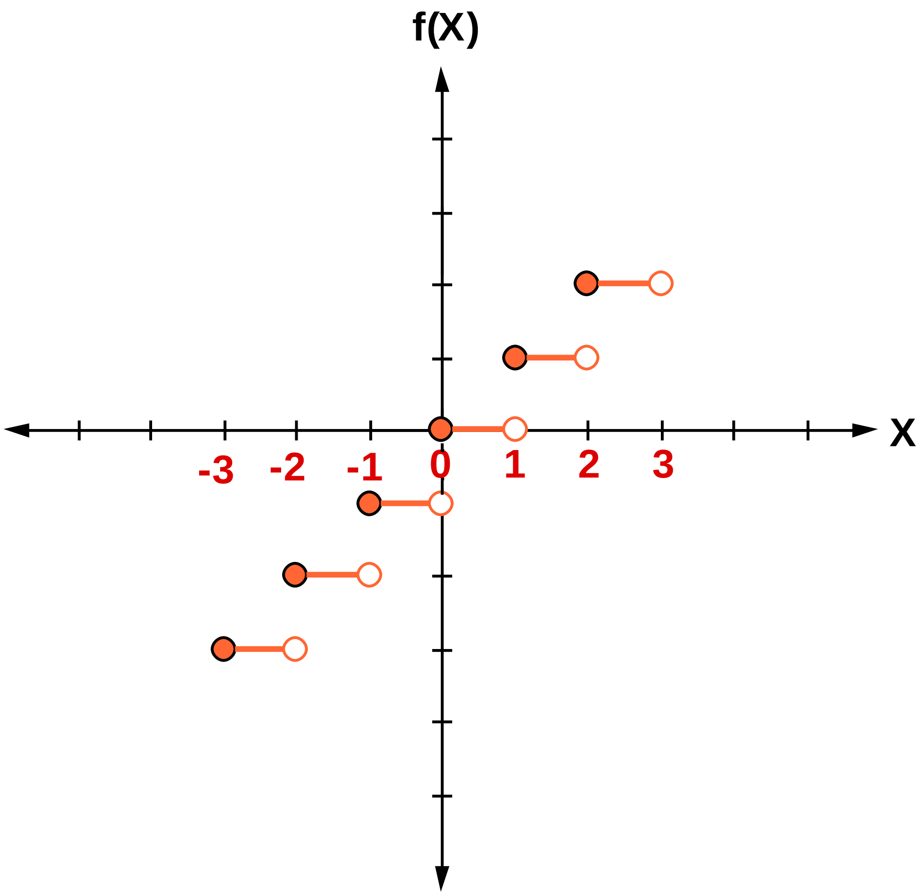


Figura 4.106

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de $f(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números enteros.

$$Rf(X) = \{Y/Y \in Es\}$$

(4.27) $$f(X) = X - [[X]]$$

Rango sugerido de análisis $[-3\ y\ 3)$.

$[n \leq X < n+1)$

Intervalos (Condicionantes)	$[[X]]$	**Subfunciones**	**Ecuaciones**
$-3 \leq X > -2$	-3	$f_1(X) = X - 3$	$Y = -3$
$-2 \leq X < -1$	-2	$f_2(X) = X - 2$	$Y = -2$
$-1 \leq X < 0$	-1	$f_3(X) = X - 1$	$Y = -1$
$0 \leq X < 1$	0	$f_4(X) = X$	$Y = X$
$1 \leq X < 2$	1	$f_5(X) = X + 1$	$Y = X - 1$
$2 \leq X < 3$	2	$f_6(X) = X + 2$	$Y = X - 2$

Análisis de ecuaciones:
Se tomará la primera ecuación para su análisis.

1. $Y = X + 3$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta:$m = -{}^{A}\!/_{B} = 1$, recta a 45 grados.
Ecuación ordenada: $X - Y + 3 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 3 \Longrightarrow P_1(0,3)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -3 \Longrightarrow P_2(-3,0)$$

Se puede complementar el análisis general, tomando cualquier otra ecuación, por ejemplo.

5. $Y = X - 1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/_{B} = 1$, recta a 45 grados.
Ecuación ordenada: $X - Y - 1 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:
Si se observa las pendientes de las rectas que fueron analizadas aleatoriamente, se puede comprobar que todas pertenecen a la misma familia cuyo ángulo de inclinación es 45 grados.
Gráfica simultanea de ecuaciones:

.

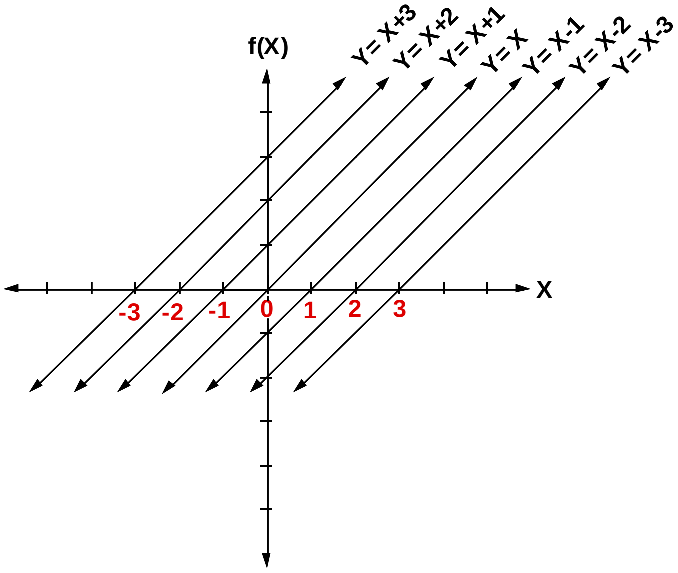


Figura 4.107

Generando la función $f(X)$
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

.

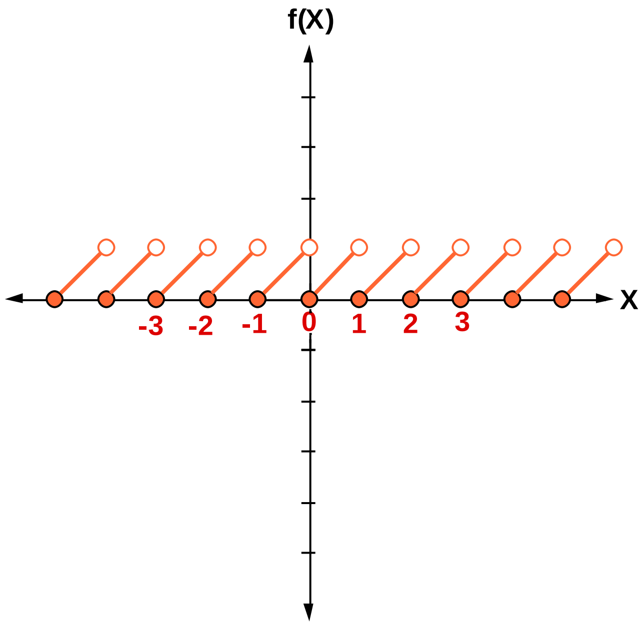


Figura 4.108

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de $f(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y sea mayor o igual que cero y menor que uno.

$$Rf(X) = \{Y/[0 \leq Y < 1)\}$$

(4.28) $$g(X) = X + [[X]]$$

Rango sugerido de análisis $[-3\ y\ 3)$.

$[n \leq X < n+1)$

Intervalos (Condicionantes)	$[[X]]$	**Subfunciones**	**Ecuaciones**
$-3 \leq X > -2$	-3	$f_1(X) = X - 3$	$Y = -3$
$-2 \leq X < -1$	-2	$f_2(X) = X - 2$	$Y = -2$
$-1 \leq X < 0$	-1	$f_3(X) = X - 1$	$Y = -1$
$0 \leq X < 1$	0	$f_4(X) = X$	$Y = X$
$1 \leq X < 2$	1	$f_5(X) = X + 1$	$Y = X + 1$
$2 \leq X < 3$	2	$f_6(X) = X + 2$	$Y = X + 2$

Análisis de ecuaciones:

Se tomará la segunda ecuación para su análisis.

2. $Y = X - 2$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}/_{B} = 1$, recta a 45 grados.

Ecuación ordenada: $X - Y - 2 = 0$

Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -2 \Longrightarrow P_1(0, -2)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 2 \Longrightarrow P_2(2, 0)$$

Se puede complementar el análisis general, tomando cualquier otra ecuación, por ejemplo.

6. $Y = X + 2$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}/_{B} = 1$, recta a 45 grados.
Ecuación ordenada: $X - Y + 2 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 2 \Longrightarrow P_1(0, 2)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -2 \Longrightarrow P_2(-2, 0)$$

Si se observa las pendientes de las rectas que fueron analizadas aleatoriamente, se puede comprobar que todas pertenecen a la misma familia cuyo ángulo de inclinación es 45 grados.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

.

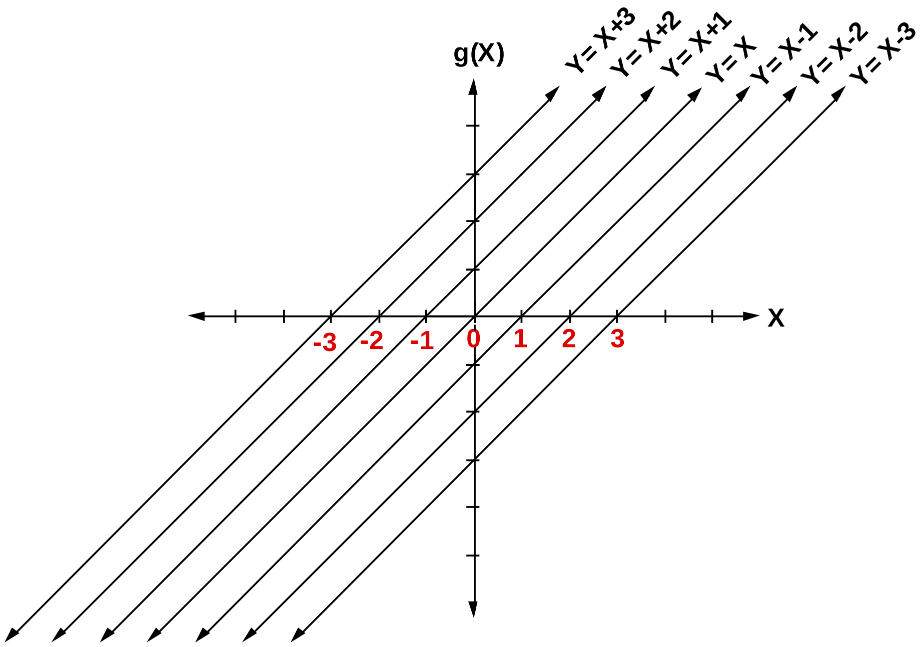


Figura 4.109

Generando la función $g(X)$

En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

.

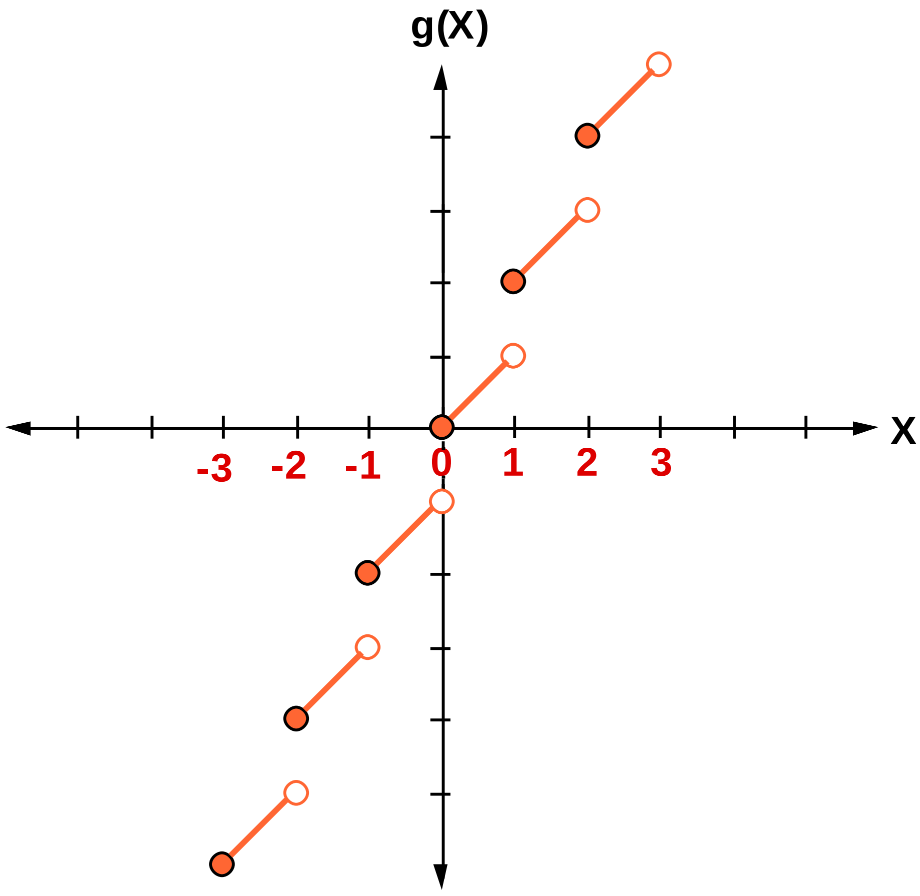


Figura 4.110

Dominio o campo de existencia de $g(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Dg(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de $g(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y sea mayor o igual que n y menor que $n+1$, donde n es

un número entero par.

$$Rg(X) = \{Y/[n \leq Y < n+1)\}$$

(4.29) $$f(X) = [[X + 4]]$$

Rango de análisis $[-4 \ y \ 3)$.

$[n \leq X < +1)$

Intervalos (Condicionantes)	X	$X+4$	$[[X+4]]$	Subfunciones	Ecuaciones
$-4 \leq X < -3$	-4	0	0	$f_1(X) = 0$	$Y = 0$
$-3 \leq X < -2$	-3	1	1	$f_2(X) = -3$	$Y = 1$
$-2 \leq X < -1$	-2	2	2	$f_3(X) = -2$	$Y = 2$
$-1 \leq X < 0$	-1	3	3	$f_4(X) = -1$	$Y = 3$
$0 \leq X < 1$	0	4	4	$f_5(X) = 0$	$Y = 4$
$1 \leq X < 2$	1	5	5	$f_6(X) = 1$	$Y = 5$
$2 \leq X < 3$	2	6	6	$f_7(X) = 2$	$Y = 6$

Análisis de ecuaciones:

Se tomará la primera ecuación para su análisis.

1. $Y = 0$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2 , ecuación del eje X.

Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

6. $Y = 5$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

Como se podrá apreciar todas las ecuaciones restantes tienen la misma estructura, por lo que pertenecen a la misma familia de rectas, es decir $Y = K$ de pendiente 0, rectas paralelas.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

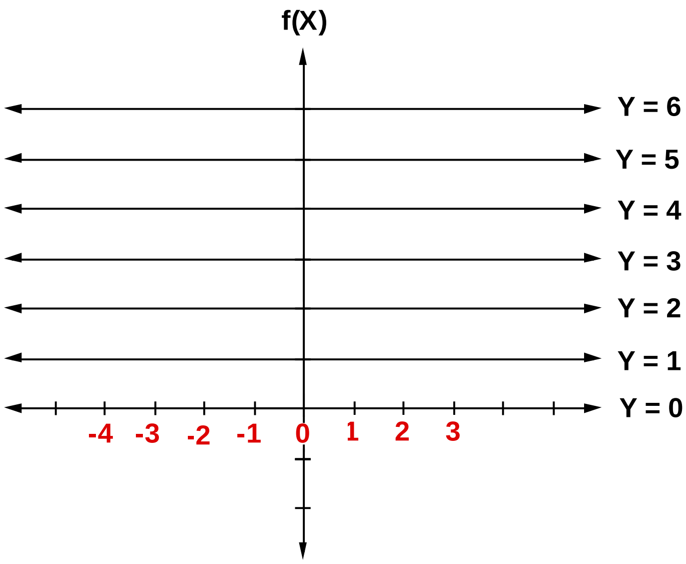


Figura 4.111

Generando la función $f(X)$
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

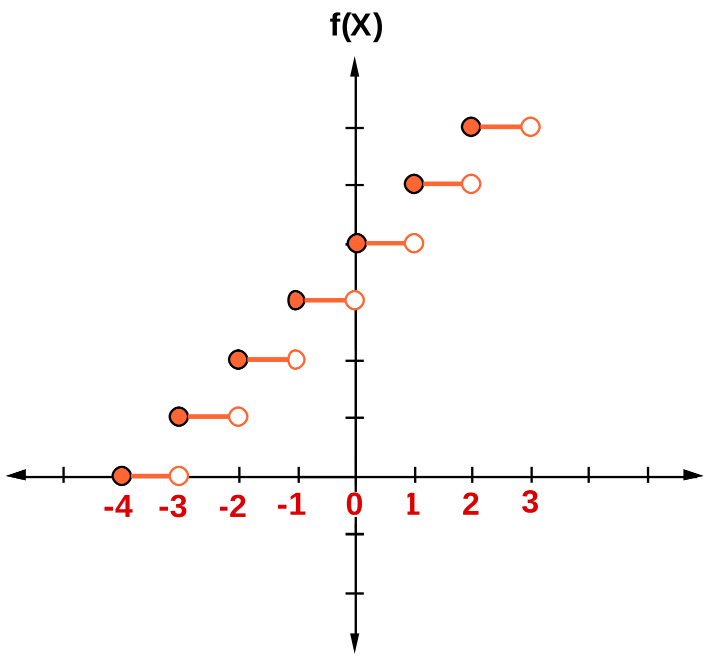


Figura 4.112

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:
Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de $f(X)$:
Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números enteros

$$Rf(X) = \{Y/Y \in Es\}$$

(4.30) $$h(X) = X + 1 - [[X]]$$

Rango sugerido de análisis [-3 y 3).

$[n \leq X < +1)$

Intervalos (Condicionantes)	$[[X]]$	$X + 1 - [[X]]$	**Subfunciones**	**Ecuaciones**
$-3 \leq X < -2$	-3	$X + 4$	$f_2(X) = X + 4$	$Y = X + 4$
$-2 \leq X < -1$	-2	$X + 3$	$f_3(X) = X + 3$	$Y = X + 3$
$-1 \leq X < 0$	-1	$X + 2$	$f_4(X) = X + 2$	$Y = X + 2$
$0 \leq X < 1$	0	$X + 1$	$f_5(X) = X + 1$	$Y = X + 1$
$1 \leq X < 2$	1	$X + 0$	$f_6(X) = X$	$Y = X$
$2 \leq X < 3$	2	$X - 1$	$f_7(X) = X - 1$	$Y = X - 1$

Análisis de ecuaciones:
Se tomará la tercera ecuación para su análisis.

3. $Y = X + 2$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/_{B} = 1$, recta a 45 grados.
Ecuación ordenada: $X - Y + 2 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = 2 \Longrightarrow P_1(0, 2)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = -2 \Longrightarrow P_2(-2, 0)$$

Se puede complementar el análisis general, tomando cualquier otra ecuación, por ejemplo.

6. $Y = X - 1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/\!{}_{B} = 1$, recta a 45 grados.
Ecuación ordenada: $X - Y - 1 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a)\ Con\ X = 0;\ Y = -1 \Longrightarrow P_1(0, -1)$$

$$b)\ Con\ Y = 0;\ X = 1 \Longrightarrow P_2(1, 0)$$

Si se observa las pendientes de las rectas que fueron analizadas aleatoriamente, se puede comprobar que todas pertenecen a la misma familia cuyo ángulo de inclinación es 45 grados.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

.

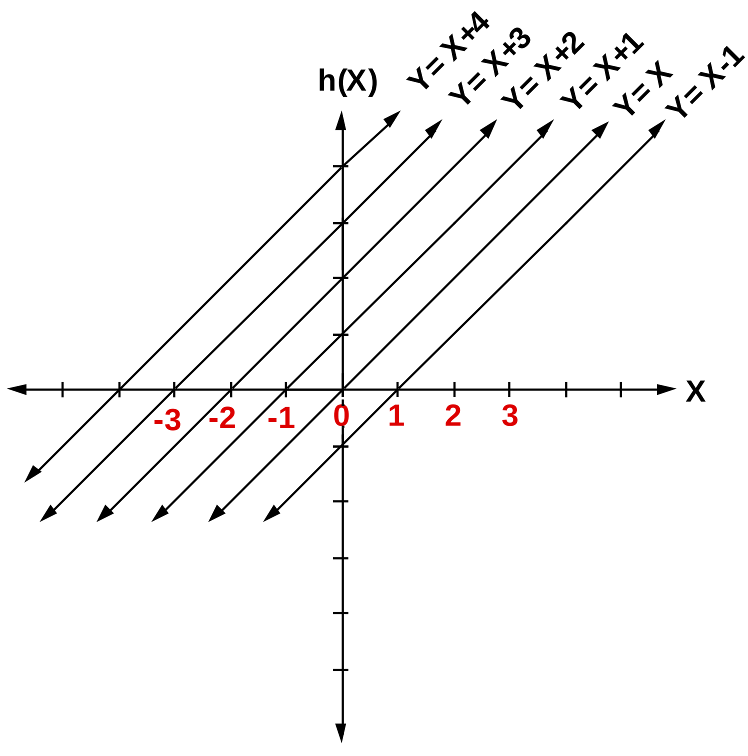


Figura 4.113

Generando la función $h(X)$
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

.

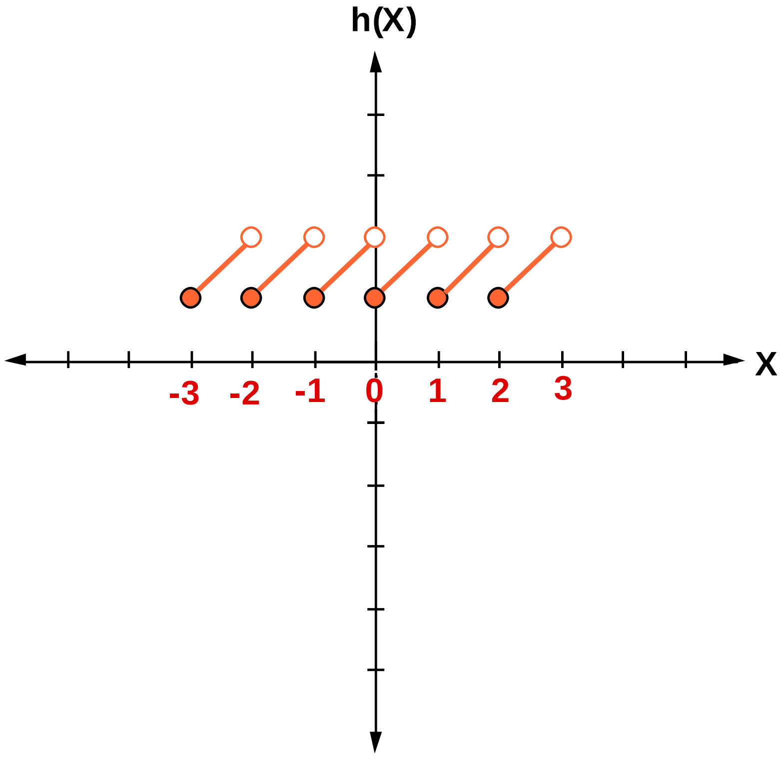


Figura 4.114

Dominio o campo de existencia de $h(X)$:
Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Dh(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de h(X):
Conjunto de valores de Y tal que Y sea mayor o igual que uno y menor que 2.

$$Rh(X) = \{Y/[1 \leq Y < 2)\}$$

(4.31) $$f(X) = 4X - [[X]]$$

$[n \leq X < +1)$

Intervalos (Condicionantes)	$[[X]]$	$4X - [[X]]$	**Subfunciones**	**Ecuaciones**
$-3 \leq X < -2$	-3	$4X + 3$	$f_2(X) = 4X + 3$	$Y = 4X + 3$
$-2 \leq X < -1$	-2	$4X + 2$	$f_3(X) = 4X + 2$	$Y = 4X + 2$
$-1 \leq X < 0$	-1	$4X + 1$	$f_4(X) = 4 + 1$	$Y = 4X + 1$
$0 \leq X < 1$	0	$4X$	$f_5(X) = 4X$	$Y = 4X$
$1 \leq X < 2$	1	$4X - 1$	$f_6(X) = 4X - 1$	$Y = 4X - 1$
$2 \leq X < 3$	2	$4X - 2$	$f_7(X) = 4X - 2$	$Y = 4X - 2$

Rango sugerido de análisis $[-3 \ y \ 3)$.
Análisis de ecuaciones:
Se tomará la segunda ecuación para su análisis.

2. $Y = 4X + 2$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/\!_{B} = 4$
Ecuación ordenada: $4X - Y + 2 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a) \ Con \ X = 0; \ Y = 2 \Longrightarrow P_1(0, 2)$$

$$b) \ Con \ Y = 0; \ X = -{}^{1}\!/\!_{2} \Longrightarrow P_2(-{}^{1}\!/\!_{2}, 0)$$

Se puede complementar el análisis general, tomando cualquier otra ecuación, por ejemplo.

5. $Y = 4X - 1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Pendiente de la recta: $m = -{}^{A}\!/\!_{B} = 4$
Ecuación ordenada: $4X - Y - 1 = 0$
Cortes o intersecciones con los ejes coordenados:

$$a) \ Con \ X = 0; \ Y = -1 \Longrightarrow P_1(0, -1)$$

$$b) \ Con \ Y = 0; \ X = {}^{1}\!/\!_{4} \Longrightarrow P_2({}^{1}\!/\!_{4}, 0)$$

Si se observa las pendientes de las rectas que fueron analizadas aleatoriamente, se puede comprobar que todas pertenecen a la misma familia.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

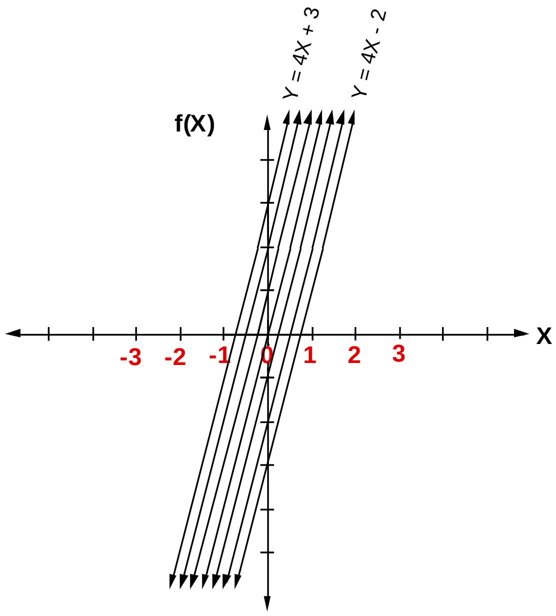


Figura 4.115

Generando la función $f(X)$
En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:

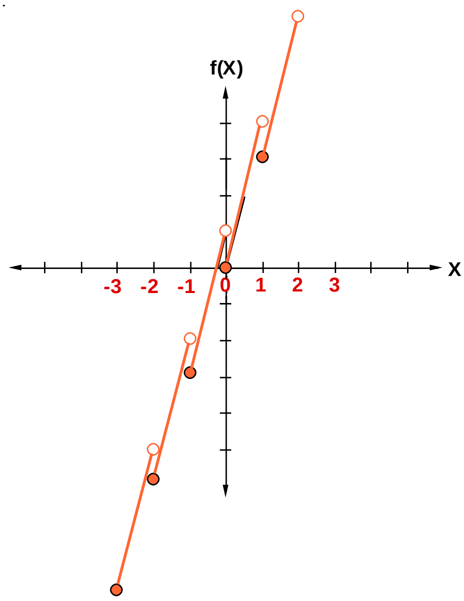


Figura 4.116

En base a los condicionantes de cada sub-función se tendrá que:
Dominio o campo de existencia de f(X):
Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de f(X):
Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Rf(X) = \{Y/Y \in R_2\}$$

(4.32) $$g(X) = [[X^2]]$$

Rango sugerido de análisis $[-2\ y\ 2)$.

$[n \leq X < +1)$

Intervalos (Condicionantes)	X	$[[X^2]]$	**Subfunciones**	**Ecuaciones**
$-\sqrt{5} < X \leq -2$	-2	4	$f_2(X) = 4$	$Y = 4$
$-2 < X \leq -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	3	$f_3(X) = 3$	$Y = 3$
$-\sqrt{3} < X \leq -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	2	$f_4(X) = 2$	$Y = 2$
$-\sqrt{2} < X \leq -1$	-1	1	$f_5(X) = 1$	$Y = 1$
$-1 < X < 1$	0	0	$f_6(X) = 0$	$Y = 0$
$1 \leq X < \sqrt{2}$	1	1	$f_7(X) = 1$	$Y = 1$
$\sqrt{2} \leq X < \sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	$f_8(X) = 2$	$Y = 2$
$\sqrt{3} \leq X < 2$	$\sqrt{3}$	3	$f_9(X) = 3$	$Y = 3$
$2 \leq X < \sqrt{5}$	2	4	$f_{10}(X) = 4$	$Y = 4$

Análisis de ecuaciones:
Se tomará la tercera ecuación para su análisis.

1. $Y = 2$

Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2 , ecuación del eje X.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

9. $Y = 4$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.
Como se podrá apreciar todas las ecuaciones restantes tienen la misma estructura, por lo que pertenecen a la misma familia de rectas, es decir $Y = K$ de pendiente '(0), rectas paralelas.
Gráfica simultanea de ecuaciones:

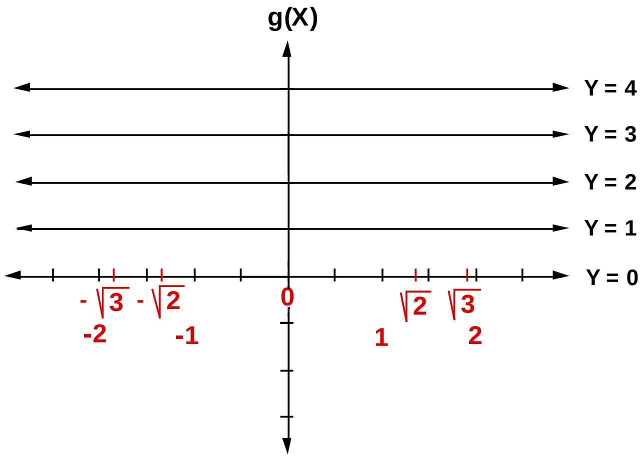


Figura 4.117

Generando la función $g(X)$, en base a los condicionantes de cada subfunción se tendrá que:

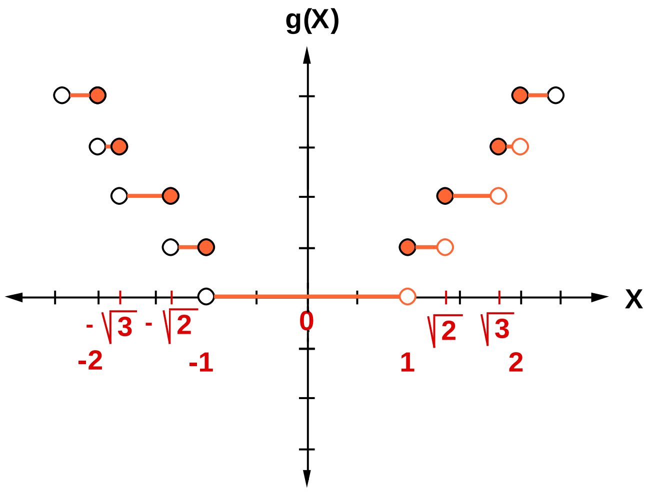


Figura 4.118

Dominio o campo de existencia de $g(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$Dg(X) = \{X/X \in R_2\}$

Rango o ámbito de $g(X)$:

Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números enteros positivos

incluido el cero.

$$Rg(X) = \{Y/Y \in Es(+), incluido\ X = 0\}$$

(4.33) $$f(X) = [[2X]]$$

Intervalos	**Intervalos (Condicionantes)**	X	$2X$	$[[2X]]$	**Subfunciones**	**Ecuaciones**
$-2 \leq 2x < -1$	$-1 \leq 2x < -0{,}5$	-1	-2	-2	$f_2(X) = -2$	$Y = -2$
$-1 \leq 2x < 0$	$-0{,}5 \leq 2x < 0$	$-1/2$	-1	-1	$f_3(X) = -1$	$Y = -1$
$0 \leq 2x < 1$	$0 \leq 2x < 0{,}5$	0	0	0	$f_4(X) = 0$	$Y = 0$
$1 \leq 2x < 2$	$0{,}5 \leq 2x < 1$	$1/2$	1	1	$f_5(X) = 1$	$Y = 1$
$-2 \leq 2x < 3$	$1 \leq 2x < 1{,}5$	1	2	2	$f_5(X) = 2$	$Y = 2$
$3 \leq 2x < 4$	$1{,}5 \leq 2x < 2$	$3/2$	3	3	$f_6(X) = 3$	$Y = 3$
$4 \leq 2x < 5$	$2 \leq 2x < 2{,}5$	2	4	4	$f_7(X) = 4$	$Y = 4$

Análisis de ecuaciones:

Se tomará la primera ecuación para su análisis.

1. $Y = -2$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2

Ecuación de la forma:$Y = K$ es una recta horizontal.

Analizando la séptima ecuación.

7. $Y = 4$

Grado de la ecuación: primer grado.

Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.

Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

Como se podrá apreciar todas las ecuaciones restantes tienen la misma estructura, por lo que pertenecen a la misma familia de rectas, es decir $Y = K$ de pendiente 0, es decir rectas paralelas.

Gráfica simultanea de ecuaciones:

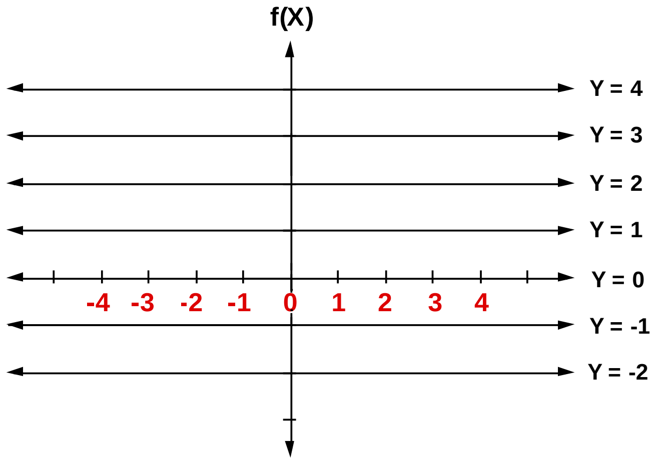


Figura 4.119

Generando la función $f(X)$, en base a los condicionantes de cada subfunción se tendrá que:

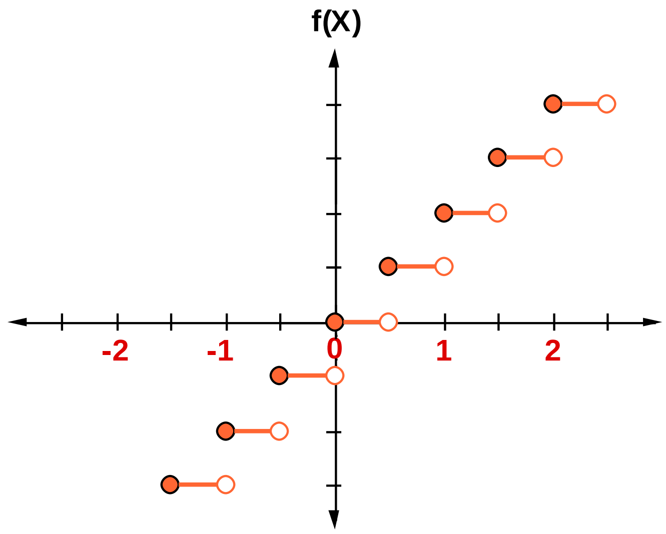


Figura 4.120

Dominio o campo de existencia de $f(X)$:

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Rango o ámbito de f(X): Conjunto de valores de Y tal que Y pertenece al conjunto infinito de los números enteros.

$$Rf(X) = \{Y/Y \in Es\}$$

4.4. Función signo "X".

4.4.1. Definición

La función signo de "X", es un tipo único de función compuesta, la cual está constituida por tres "sub-funciones" de "X", cada uno de estos elementos constitutivos de la función principal a su vez, como es característico de una función compuesta, estará acompañado de un determinado "condicionante o condicionamiento" de tal manera que al concluir el análisis, cada una de las "sub-funciones" aportará a la generación de una función en R_2.

Se denota como:

$$f(X) = sgn(X)$$

Su definición es como sigue:

$$sgn(X) = \begin{cases} 1 \quad si \quad X > 0 \\ 0 \quad si \quad X = 0 \\ -1 \quad si \quad X < 0 \end{cases}$$

El análisis de su dominio, rango y su gráfica es la siguiente.

Función definida:

$$sgn(X) = \begin{cases} 1 \quad si \quad X > 0 \\ 0 \quad si \quad X = 0 \\ -1 \quad si \quad X < 0 \end{cases}$$

Sub-funciones:	Ecuaciones:
1. $f_1(X) = 1$	1. $Y = 1$
2. $f_2(X) = 0$	2. $Y = 0$
3. $f_3(X) = -1$	3. $Y = -1$

Análisis de ecuaciones:

1. $Y = 1$

Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: $Y = K$ es una recta horizontal.

2. $Y = 0 \quad si \quad X = 0$
Coordenadas rectangulares de un punto.

$$P(0,0)$$

3. $Y = -1$
Grado de la ecuación: primer grado.
Representa: al no existir términos cruzados, una recta en R_2.
Ecuación de la forma: Y=K es una recta horizontal.
Gráfica simultanea de ecuaciones:

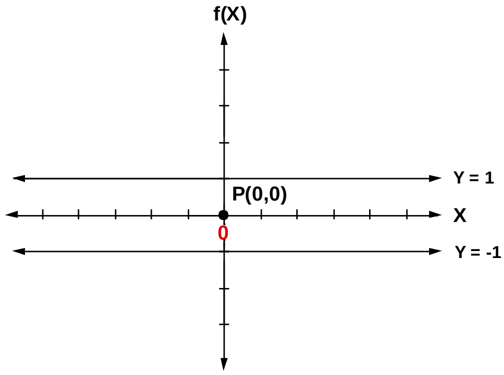


Figura 4.121

Generando la función $f(X)$, en base a los condicionantes de cada subfunción se tendrá que:

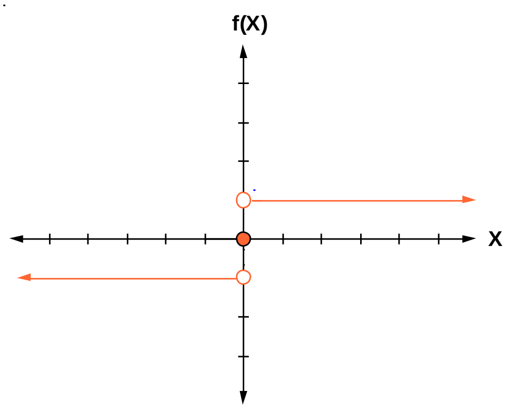


Figura 4.122

4.5. Función composición de "X"

4.5.1. Definición

Sean f y g dos funciones reales y de variable real, definidas en sus respectivos dominios, se denomina función composición de las funciones f y g a la función denotada por f o g (f composición de g) y se define por $(f\ _o\ g(x) = f[g(x)]$

El segundo miembro de la ecuación anterior $f[g(x)]$ implica que f será evaluada en$g(x)$, lo que resulta en términos sencillos que, en cada una de las variables X de la primera función deberá sustituirse el valor de la función '8.

Gráficamente, se podría representar de la siguiente manera:

.

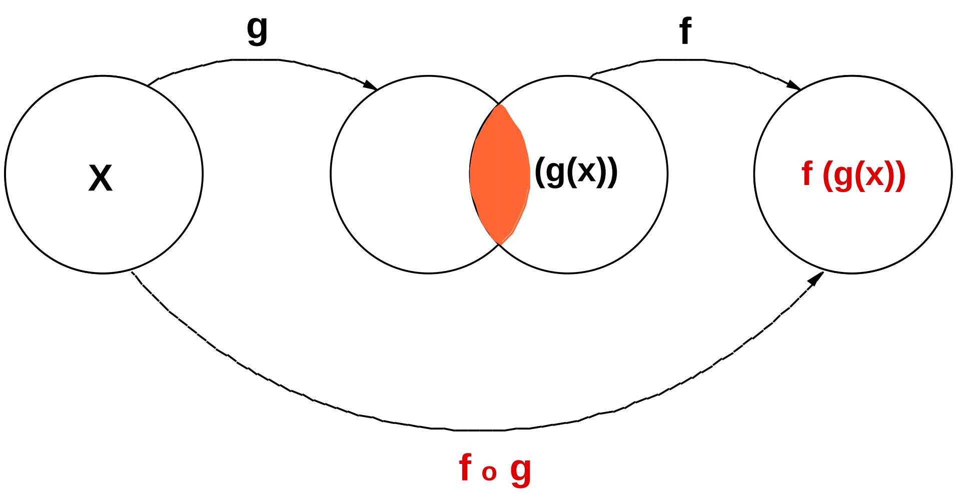


Figura 4.123

Entonces el dominio de la función $f\ _o\ g$ estará constituido como sigue:

$$D(f\ _o\ g) = \{X/X \in Dg(x) \cap g(x) \in Df(x)\}$$

4.5.2. Propiedades de la función composición

1. La función composición cumple la propiedad asociativa: $h\ _o\ (g\ _o\ f) = (h\ _o\ g)\ _o\ f$

2. La función composición no es conmutativa: $(g\ _o\ f) \neq (f\ _o\ g)$

3. Tiene elemento neutro que es la función identidad $I(x) = x : (I\ _o\ g) = (g\ _o\ I) = g$

4. La composición de una función con su inversa nos da la función identidad, es decir, existe **elemento simétrico**, el cual es la función inversa:

$$(f\ _o\ f^{-1})(x) = (f^{-1}\ _o\ f)(x) = I(x) = x$$

Dadas dos funciones cualquiera f y g siempre se podrá obtener a partir de ellas las siguientes funciones composición:

1. $(f\ _o\ g)(x)$
2. $(g\ _o\ f)(x)$
3. $(f\ _o\ f)(x)$
4. $(g\ _o\ g)(x)$

Por ejemplo, sean las funciones $f(x) = 3X + 2$ y $g(x) = X - 4$ determinar las cuatro funciones composición que se pueden generar a partir de ellas, y que fueron indicadas anteriormente.

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = 3(X - 4) + 2 = 3X - 12 + 2 = 3X - 10$$

$$(f\ _o\ g)(x) = 3X - 10$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = (3X + 2) - 4 = 3X + 2 - 4 = 3X - 2$$

$$[(g\ _o\ f)(x) = 3X - 2]$$

3. $\boldsymbol{(f\ _o\ f)(x)}$

$$(f\ _o\ f)(x) = f[f(x)] = 3(3X + 2) + 2 = 9X + 6 + 2 = 9X + 8$$

$$(f\ _o\ f)(x) = 9X + 8$$

4. $\boldsymbol{(g\ _o\ g)(x)}$

$$(g\ _o\ g)(x) = g[g(x)] = (X-4)-4 = X-4-4 = X-8$$

$$(g\ _o\ g)(x) = X-8$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

(4.34) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), (f o f) (x), (g o g) (x), para:

$\boldsymbol{f(X) = 3X+2}$

$\boldsymbol{g(X) = \dfrac{(X+3)}{2X+1}}$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f[\frac{X+3}{2X+1}] = 3(\frac{X+3}{2X+1})+2 = \frac{3X+9}{2X+1}+2$$

$$\frac{3X+9+4X+2}{2X+1} = \frac{7X+11}{2X+1}$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = \frac{7X+11}{2X+1}}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[3X{+}2] = \frac{(3X+2)+3}{2(3X+2)+1} = \frac{3X+5}{6X+4+1} = \frac{3X+5}{6X+5}$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = \frac{3X+5}{6X+5}}$$

3. $\boldsymbol{(f\ _o\ f)(x)}$

$$(f\ _o\ f)(x) = f[f(x)] = f[3X+2] = 3(3X+2)+2 = 9X+6+2 = 9X+8$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ f)(x) = 9X+8}$$

4. $\boldsymbol{(g\ _o\ g)(x)}$

$$(g\ _o\ g)(x) = g[g(x)] = g[{}^{X+3}/_{2X+1}] = \frac{(\frac{X+3}{2X+1})+3}{2(\frac{X+3}{2X+1})+1} =$$

$$= \frac{\frac{X+3+6X+3}{2X+1}}{(\frac{2X+6}{2X+1})+1} = \frac{\frac{X+3+6X+3}{2X+1}}{\frac{2X+6+2X+1}{2X+1}} =$$

$$= \frac{\frac{7X+6}{2X+1}}{\frac{4X+7}{2X+1}} = \frac{7X+6}{4X+7}$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ g)(x) = \frac{7X+6}{4X+7}}$$

(4.35) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), (f o f) (x), (g o g) (x), para:

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{2}{4x-1}}$$

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{3X+1}{2X-2}}$$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[\frac{3X+1}{2X-2}] = \frac{2}{4(\frac{3X+1}{2X-2})-1} =$$

$$= \frac{2}{\frac{12X+4-2X+2}{2X-2}} =$$

$$= \frac{2}{\frac{10X+6}{2X-2}} = \frac{4X-4}{10X+6} = \frac{2X-2}{5X+3} =$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[\frac{2}{4X-1}] = \frac{3(\frac{2}{4X-1})+1}{2(\frac{2}{4X-1})-2} =$$

$$= \frac{(\frac{6}{4X-1})+1}{(\frac{4}{4X-1})-2} = \frac{\frac{6+4X-1}{4X-1}}{\frac{4-8X+2}{4X-1}} =$$

$$= \frac{\frac{4X+5}{4X-1}}{\frac{-8X+6}{4X-1}} = \frac{4X+5}{-8X+6}$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = \frac{4X+5}{-8X+6}}$$

3. $\boldsymbol{(f\ _o\ f)(x)}$

$$(f\ _o\ f)(x) = f[f(x)] = f[{}^{2}/_{4X-1}] = \frac{2}{4({}^{2}/_{4X-1})-1} =$$

$$= \frac{2}{({}^{8}/_{4X-1})-1} = \frac{2}{{}^{8-4X+1}/_{4X-1}} =$$

$$= \frac{2}{\frac{-4X+9}{4X-1}} = \frac{8X-2}{-4X+9}$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ f)(x)\frac{8X-2}{-4X+9}}$$

4. $\boldsymbol{(g\ _o\ g)(x)}$

$$(g\ _o\ g)(x) = g[g(x)] = g[\frac{3X+1}{2X-2}] =$$

$$= \frac{3(\frac{3X+1}{2X-2})+1}{2(\frac{3X+1}{2X-2})-2} = \frac{(\frac{9X+3}{2X-2})+1}{(\frac{6X+2}{2X-2})-2} =$$

$$= \frac{\frac{9X+3+2X-2}{2X-2}}{\frac{6X+2-4X+4}{2X-2}} = \frac{\frac{11x+1}{2X-2}}{\frac{2X+6}{2X-2}} =$$

$$= \frac{11X+1}{2X+6}$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ g)(x) = \frac{11X+1}{2X+6}}$$

(4.36) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), (f o f) (x), (g o g) (x), para:

$\boldsymbol{f(x) = x^2}$

$\boldsymbol{g(x) = X+3}$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[X+3] = (X+3)^2 = X^2+6X+9$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)X^2+6X+9}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[X^2] = X^2+3$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = X^2+3}$$

3. $\boldsymbol{(f\ _o\ f)(x)}$

$$(f\ _o\ f)(x) = f[f(x)] = f[X^2] = (X^2)^2 = X^4$$

$$(f\ _o\ f)(x) = X^4$$

4. $\boldsymbol{(g\ _o\ g)(x)}$

$$(g\ _o\ g)(x) = g[g(x)] = g[X+3] = (X+3)+3 = X+6$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ g)(x) = X+6}$$

(4.37) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), para:

$\boldsymbol{f(X) = X^2 - 3X + 2}$

$\boldsymbol{g(X) = X^2}$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[X^2] = (X^2)^2 - 3(X^2) + 2 = X^4 - 3X^2 + 2$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = X^4 - 3X^2 + 2}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[X^2 - 3X + 2] = (X^2 - 3X + 2)^2$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = (X^2 - 3X + 2)^2}$$

(4.38) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), para:

$\boldsymbol{f(X) = senX}$

$\boldsymbol{g(X) = X^2 - 2}$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[X^2 - 2] = sen(X^2 - 2)$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = sen(X^2 - 2)}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[senX] = (senX)^2 - 2$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = sen^2X - 2}$$

(4.39) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), para:

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{X-1}{4X+3}}$$

$$\boldsymbol{g(X) = \sqrt{X}}$$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[\sqrt{X}] = \frac{\sqrt{X}-1}{4\sqrt{X}+3}$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = \frac{\sqrt{X}-1}{4\sqrt{X}+3}}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[X-14X+3] = \sqrt{\frac{X-1}{4X+3}}$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = \sqrt{\frac{X-1}{4X+3}}}$$

(4.40) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), para:

$$\boldsymbol{f(X) = sen^2X}$$

$$\boldsymbol{g(X) = cotg^2 2X}$$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[cotg^2 2X] = sen^2(cotg^2 2X)$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = sen^2(cotg^2 2X)}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[sen^2 X] = cotg^2(2sen^2 X)$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = cotg^2(2sen^2 X)}$$

(4.41) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), para:

$\boldsymbol{f(X) = X^2 + 4}$

$\boldsymbol{g(X) = e^x}$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[e^x] = (e^x)^2 + 4$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = (e^x)^2 + 4}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[X^2 + 4] = e^(X^2 + 4)$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = e^(X^2 + 4)}$$

(4.42) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), para:

$\boldsymbol{f(X) = \dfrac{2X-3}{X+4}}$

$\boldsymbol{g(X) = \sqrt{X+4}}$

1. $\boldsymbol{(f \ _o \ g)(x)}$

$$(f \ _o \ g)(x) = f[g(x)] = f[\sqrt{X+4}] = \frac{2\sqrt{X+4}-3}{\sqrt{X+4}+4}$$

$$\boldsymbol{(f \ _o \ g)(x) = \frac{2\sqrt{X+4}-3}{\sqrt{X+4}+4}}$$

2. $\boldsymbol{(g \ _o \ f)(x)}$

$$(g \ _o \ f)(x) = g[f(x)] = g[\frac{2X-3}{X+4}] = \sqrt{2X-3/X+4)+4} =$$

$$= \sqrt{\frac{2X-3+4X+16}{X+4}} = \sqrt{\frac{6X+13}{X+4}}$$

$$\boldsymbol{(g \ _o \ f)(x) = \sqrt{\frac{6X+13}{X+4}}}$$

(4.43) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), para:

$$\boldsymbol{f(X)} = \begin{cases} \boldsymbol{X-2 \quad si \quad X \leq 0} \\ \boldsymbol{X^2 \quad si \quad X > 0} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{g(X) = \sqrt{4X+5}X^3}$$

1. $\boldsymbol{(f \ _o \ g)(x)}$

$$Para: \boldsymbol{X \leq 0}$$

$$(f \ _o \ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{4X+5}{X^3}\right] = \left(\frac{4X+5}{X^3}\right) - 2 =$$

$$= \frac{4X+5-2X^3}{X^3} = \frac{-2X^3+4X+5}{X^3}$$

$$\boldsymbol{(f \ _o \ g)(x) = \frac{-2X^3+4X+5}{X^3}}$$

$$Para : \boldsymbol{X > 0}$$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{4X+5}{X^3}\right] = \left(\frac{4X+5}{X^3}\right)^2 =$$

$$\frac{(4X+5)^2}{(X^3)^2} = \frac{16X^2+40X+25}{X^6}$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = \frac{16X^2+40X+25}{X^6}}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$Para : \boldsymbol{X \leq 0}$$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[X-2] = \frac{4(X-2)+5}{(X-2)^3} =$$

$$= \frac{4X-8+5}{(X-2)^3} = \frac{4X-3}{X^3-6X^2+12X-8}$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = \frac{4X-3}{X^3-6X^2+12X-8}}$$

$$Para : \boldsymbol{X > 0}$$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[X^2] = \frac{4X^2+5}{(X^2)^3} =$$

$$= \frac{4X^2+5}{X^6}$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = \frac{4X^2+5}{X^6}}$$

(4.44) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), para:

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{-3X-2}{X+1}}$$

$$\boldsymbol{g(X) = 6X^2+1}$$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[6X^2+1] = \frac{-3(6X^2+1)-2}{(6X^2+1)+1}$$

$$= \frac{-18X^2-3-2}{6X^2+1+1} = \frac{-18X^2-5}{6X^2+2}$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = \frac{-18X^2-5}{6X^2+2}}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\frac{-3X-2}{X+1}\right] = 6\left(\frac{-3X-2}{X+1}\right)^2+1 =$$

$$= 6\left(\frac{9X^2+12X+4}{X^2+2X+1}\right)+1 =$$

$$= \left(54X^2+72X+24X^2+2X+1\right)+1 =$$

$$= \frac{54X^2+72X+24+X^2+2X+1}{X^2+2X+1} =$$

$$= \frac{55X^2+74X+25}{X^2+2X+1} =$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = \frac{55X^2+74X+25}{X^2+2X+1}}$$

(4.45) Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, definidas por
$f(X) = 10X-4$ y $g(X) = 2X-k$

Hallar el valor de k para que se cumpla la siguiente igualdad
$(f\ _o\ g)(x) = (g\ _o\ f)(x)$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[2X - k] = 10(2X - k) - 4$$

$$= 20X - 10k - 4$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = 20X - 10k - 4}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[10X - 4] = 2(10X - 4) - k =$$

$$= 20X - 8 - k$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = 20X - 8 - k}$$

De esta manera:
$(f\ _o\ g)(x) = (g\ _o\ f)(x)$

$$20X - 10k - 4 = 20X - 8 - k$$

$$20X - 20X - 10k + k - 4 + 8 = 0$$

$$-9k + 4 = 0$$

$$k = \frac{4}{9}$$

(4.46) Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, definidas por
$f(X) = X^2 + 1 \quad$ y $\quad g(X) = X + k$

Hallar el valor de k para que se cumpla la siguiente igualdad
$(f\ _o\ g)(x) = (g\ _o\ f)(x), para X = 1$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[X + k] = (X + k)^2 + 1 =$$

$$= X^2 + 2kX + k^2 + 1$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = X^2 + 2kX + k^2 + 1}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ f)(x) = g[f(x)] = g[X^2+1] = (X^2+1)+k =$$

$$= X^2+1+k$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x) = X^2+1+k}$$

De esta manera:
$(f\ _o\ g)(x) = (g\ _o\ f)(x)$

$$X^2+2kX+k^2+1 = X^2+1+k$$

$$X^2-X^2+2kX+k^2+1-1-k = 0$$

$$\boldsymbol{k^2-k+2kX = 0}$$

Como $X = 1$:

$$k^2-k+2k = 0$$

$$k^2+k = 0$$

De donde:

$$\boldsymbol{k = 0} \quad y \quad \boldsymbol{k = -1}$$

(4.47) Dadas dos funciones f(x) y g(x),determinar (f o g) (x), (g o f) (x), para:

$\boldsymbol{f(X) = \frac{X^2}{5}}$

$\boldsymbol{g(X) = X+6}$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[X+6] = \frac{(X+6)^2}{5}$$

$$= \frac{X^2+12X+36}{5}$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = \frac{X^2+12X+36}{5}}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

$$(g\ _o\ g\ _o\ f)(x) = g[g[f(x)]] = g[g(\frac{X^2}{5})] = g[(\frac{X^2}{5}) + 6] =$$

$$= (\frac{X^2}{5}) + 6 + 6 =$$

$$= \frac{X^2}{5} + 12$$

$$\boldsymbol{(g\ _o\ g\ _o\ f)(x) = \frac{X^2}{5} + 12}$$

(4.48) Dadas dos funciones f(x) y g(x), calcular el valor de X si (f o g) (x) = 2, para:

$\boldsymbol{f(X) = X - 3}$

$\boldsymbol{g(X) = X^2 + X - 1}$

$$(f\ _o\ g)(x) = 2$$

$$f[g(x)] = 2$$

$$f[X^2 + X - 1] = 2$$

$$(X^2 + X - 1) - 3 = 2$$

$$X^2 + X - 4 = 2$$

$$X^2 + X - 6 = 0$$

$$(X + 3)(X - 2) = 0$$

De donde:

$$\boldsymbol{X = -3 \quad y \quad X = 2}$$

(4.49) Dadas dos funciones f(x) y g(x), calcular (f o g) (x) , hallar su dominio para:

$\boldsymbol{f(X) = 3X^4 - 6}$

$\boldsymbol{g(X) = \sqrt{X-2}}$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[\sqrt{X-2}] = 3(\sqrt{X-2})^4 - 6$$

$$= 3(X-2)^2 - 6 =$$

$$= 3(X^2 - 4X + 4) - 6 =$$

$$= 3X^2 - 12X + 12 - 6 =$$

$$= 3X^2 - 12X + 6$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = 3X^2 - 12X + 6}$$

2. **Determinar el dominio de** $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

Analizando el dominio de $f(x)$:

$$f(X) = 3X^4 - 6$$

Dominio o campo de existencia de $f(X)$: Como la expresión polinómica carece de restricciones se puede establecer que, su dominio o campo de existencia queda definido como.

Conjunto de valores de X tal que X pertenece al conjunto infinito de los números reales.

$$Df(X) = \{X/X \in R_2\}$$

Analizando el dominio de $g(X)$:

$$g(X) = \sqrt{X-2}$$

b. Radical par de una expresión de la forma $\boldsymbol{\sqrt{a}}$

Restricción: el radicando no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real.

Análisis: $a \geq 0$

$$\boldsymbol{X - 2 \geq 0}$$

$$\boldsymbol{X \geq 2}$$

Expresándolo gráficamente se tendrá:

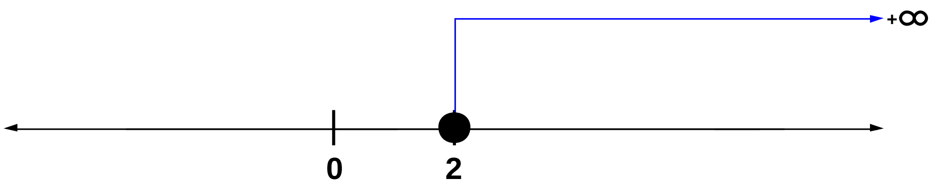


Figura 4.124

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = \{X/X \geq 2\}$$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

$$\boldsymbol{D(f\ _o\ g)(x) = \{X/X \geq 2\}}$$

(4.50) Dadas dos funciones f(x) y g(x), calcular (f o g) (x) , hallar su dominio para:

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{X^2+2}{X^2-4}}$$

$$\boldsymbol{g(X) = \sqrt{X+4}}$$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f[\sqrt{X+4}] = \frac{(\sqrt{X+4})^2+2}{(\sqrt{X+4})^2-4} =$$

$$= \frac{X+4+2}{X+4-4} =$$

$$= \frac{X+6}{X}$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = \frac{X+6}{X}}$$

2. $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$

Analizando el dominio de $f(x)$:

$$f(X) = X^2 + 2X^2 - 4$$

Cociente de dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$
Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.
Análisis: $b \neq 0$

$$X^2 - 4 \neq 0$$

$$X \neq 2 \quad y \quad X \neq -2$$

Expresándolo gráficamente se tendrá:

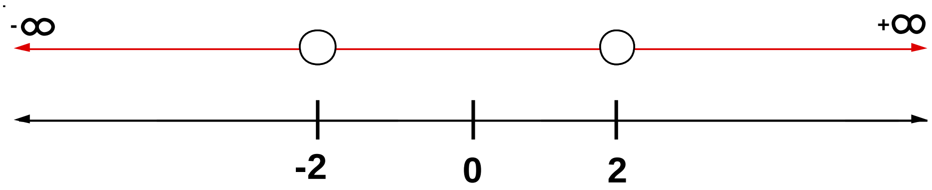


Figura 4.125

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = \{X/X \in R_2,\ excepto\ X = 2 \quad y \quad X = -2\}$$

Analizando el dominio de $g(X)$:

$$g(X) = \sqrt{X+4}$$

Radical par de una expresión de la forma $\sqrt{a}$
Restricción: el radicando no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real.

Análisis: $a \geq 0$

$$X + 4 \geq 0$$

$$X \geq -4$$

Expresándolo gráficamente se tendrá:

.

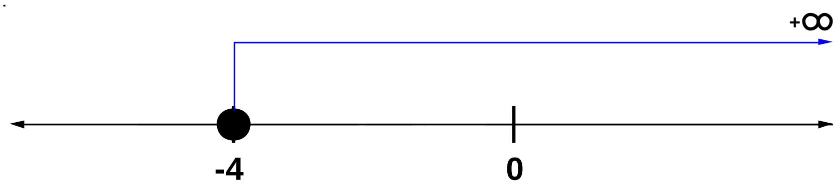


Figura 4.126

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = X/X \geq -4$$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

.

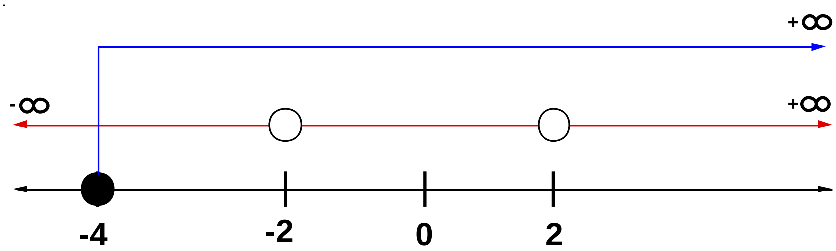


Figura 4.127

$$\boldsymbol{D(f\ _o\ g)(x) = X/X \geq -4,\ excepto\ X = 2 \quad y \quad X = -2}$$

(4.51) Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, calcular $(f\ o\ g)(x)$, hallar su dominio para:

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{X - 2}{X + 3}}$$

$$\boldsymbol{g(X) = \frac{\sqrt{X + 2}}{X - 4}}$$

1. $\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x)}$

$$(f\ _o\ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\sqrt{\frac{X+2}{X-4}}\right] = \frac{\left[\dfrac{\sqrt{X+2}}{X-4}\right]-2}{\left[\dfrac{\sqrt{X+2}}{X-4}\right]+3} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{X+2}-2X+8}{X-4}}{\dfrac{\sqrt{X+2}+3X-12}{X-4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{X+2}-2X+8}{\sqrt{X+2}+3X-12} =$$

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)(x) = \frac{\sqrt{X+2}-2X+8}{\sqrt{X+2}+3X-12}}$$

2. **Determinar el dominio de $\boldsymbol{(g\ _o\ f)(x)}$**

Analizando el dominio de $f(x)$:

$$f(X) = \frac{X-2}{X+3}$$

Cociente de dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$
Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.
Análisis: $b \neq 0$

$$X + 3 \neq 0$$

$$X \neq -3$$

Expresándolo gráficamente se tendrá:

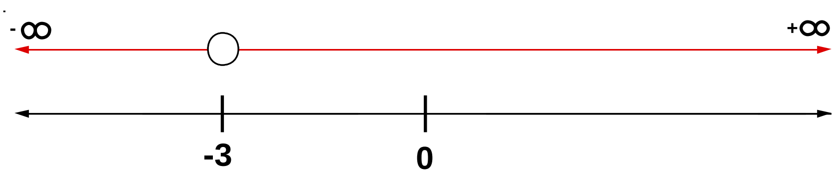


Figura 4.128

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = \{X/X \in R_2,\ excepto\ X = -3\}$$

Analizando el dominio de $g(X)$:

$$g(X) = \frac{\sqrt{X+2}}{X-4}$$

Cociente de dos expresiones de la forma $\boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{b}}$

Restricción: el radicando del numerador no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $a \geq 0 \quad y \quad b \neq 0$

$$X + 2 \geq 0$$

$$X \geq -2$$

$$X - 4 \neq 0$$

$$\boldsymbol{X \neq 4}$$

Expresándolo gráficamente se tendrá:

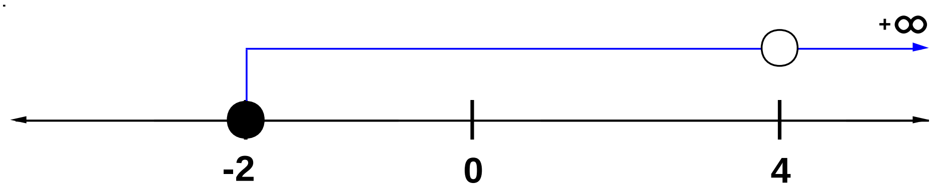


Figura 4.129

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Dg(X) = X/X \geq -2 \quad y \quad X \neq 4$$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

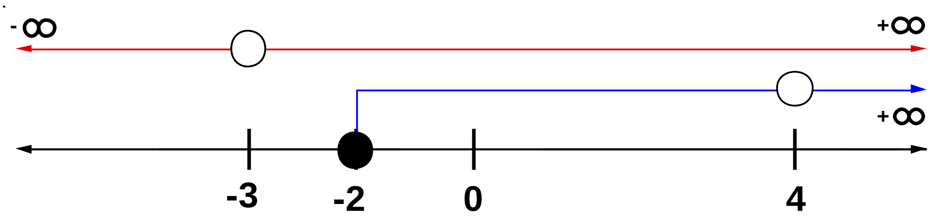


Figura 4.130

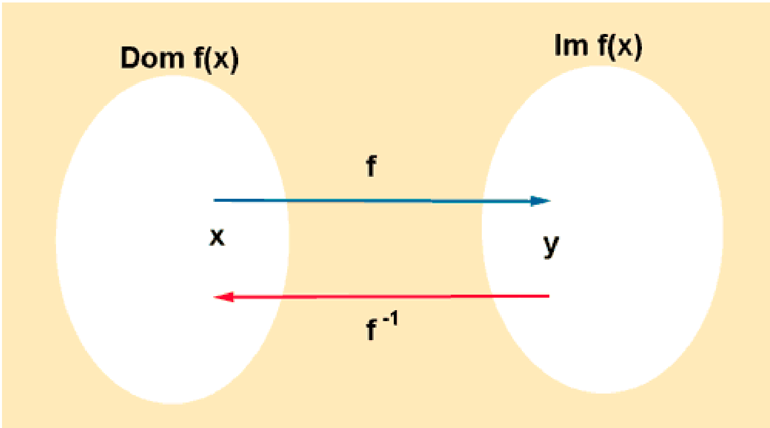
$$\boldsymbol{D(f\ _o\ g)(x) = \{X/X \geq -2,\ excepto\ X = 4\}}$$

4.6. Función Inversa

4.6.1. Definición

Se denomina función inversa o también función recíproca de una función $f(x)$ a otra función denotada por $f^{-1}(x)$, de tal manera que deberá siempre verificarse la siguiente condición:

$$Si\ f(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a$$



Dos condiciones que se desprenden inmediatamente de lo expuesto anteriormente se pueden expresar de la siguiente manera:

$$(f^{-1}\ _o\ f)(x) = x$$

$$(f\ _o\ f^{-1})(x) = x$$

4.6.2. Propiedades

a. La inversa de la composición de dos funciones

$$\boldsymbol{(f\ _o\ g)^{-1}(x) = g(x)^{-1}\ _o\ f(x)^{-1}}$$

Obsérvese la inversión en el orden del segundo miembro de la ecuación.

b. La inversa de la inversa de una función equivale a la función, es decir:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

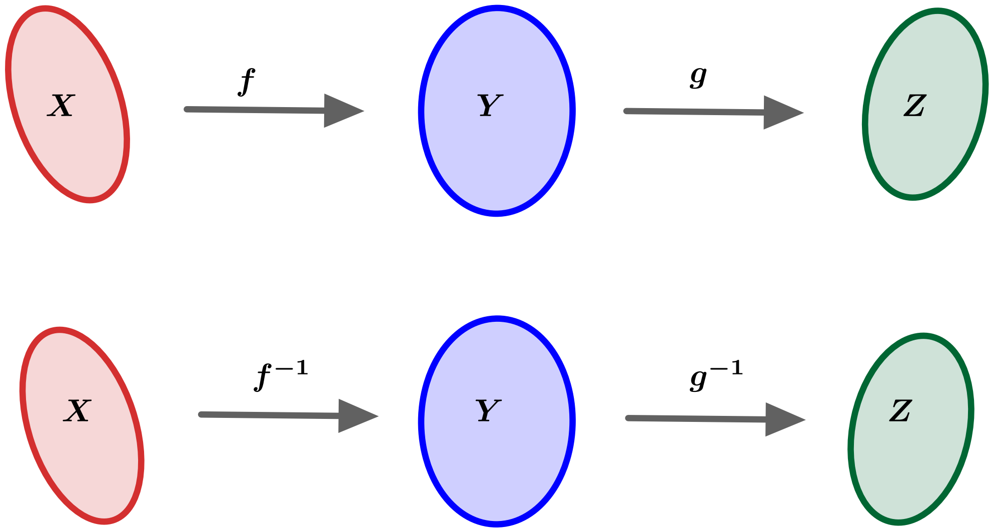


Figura 4.131

4.6.3. Pasos para obtener una función inversa

a. Se despeja la variable independiente X

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa.

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

4.6.4. La gráfica de una función inversa

“En un sistema de coordenadas cartesianas se han representado las curvas de algunas raíces, así como de sus potencias, en el intervalo $[0, 1]$. La diagonal, de la ecuación $Y = X$, es eje de simetría entre cada curva y la curva de su inversa”[1]

[1]https://goo.gl/AgqVCZ

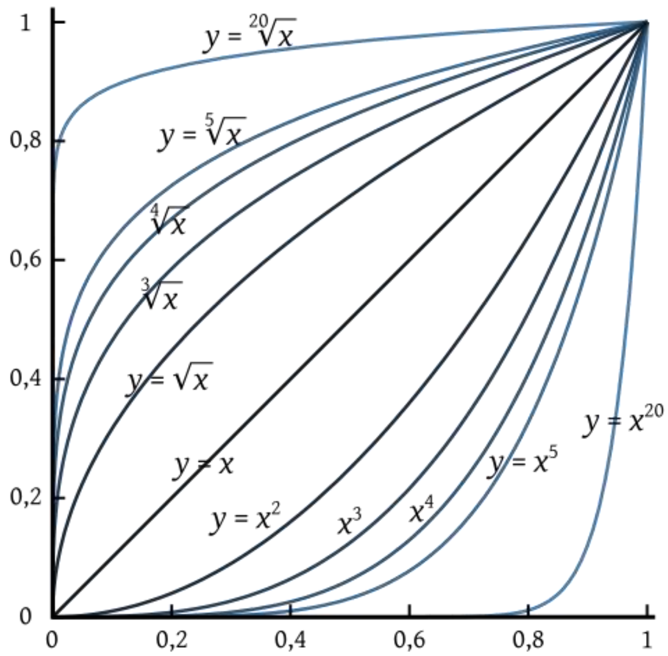


Figura 4.132

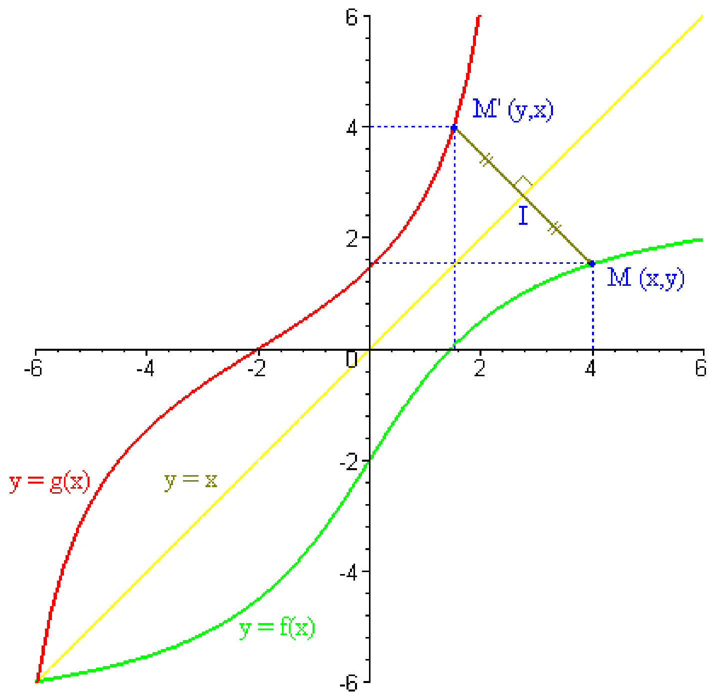


Figura 4.133

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

(4.52) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{3X-2}{X+4}}$$

a. Se despeja la variable independiente X.

$$Y = \frac{3X-2}{X+4}$$

$$Y(X+4) = 3X-2$$

$$XY + 4Y = 3X-2$$

$$XY - 3X = -4Y-2$$

$$X(Y-3) = -4Y-2$$

$$\boldsymbol{X = \frac{-4Y-2}{Y-3}}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa.

$$\boldsymbol{Y = \frac{-4X-2}{X-3}}$$

c. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa.

$$f^{-1}(X) = \frac{-4X-2}{X-3}$$

Comprobando resultados por ejemplo para $X = 2$

$$(X) = \frac{3X-2}{X+4}$$

$$f(2) = \frac{3(2)-2}{(2)+4}$$

$$f(2) = {}^4\!/_6 = {}^2\!/_3$$

$$f^{-1}(X) = \frac{-4X - 2}{X - 3}$$

$$f^{-1}({}^2\!/_3) = \frac{-4({}^2\!/_3) - 2}{({}^2\!/_3) - 3}$$

$$f^{-1}({}^2\!/_3) = \frac{-({}^8\!/_3) - 2}{({}^2\!/_3) - 3}$$

$$f^{-1}({}^2\!/_3) = \frac{\frac{(-8 - 6)}{3}}{\frac{(2 - 9)}{3}}$$

$$f^{-1}({}^2\!/_3) = \frac{\frac{-14}{3}}{\frac{-7}{3}}$$

$$f^{-1}({}^2\!/_3) = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$f^{-1}({}^2\!/_3) = 2$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{Si\ f(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a}$$

(4.53) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{X + 2}{4X - 3}}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \frac{X + 2}{4X - 3}$$

$$Y(4X - 3) = X + 2$$

$$4XY - 3Y = X + 2$$

$$4XY - X = 3Y + 2$$

$$X(4Y - 1) = 3Y + 2$$

$$\boldsymbol{X = \frac{3Y + 2}{4Y - 1}}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$\boldsymbol{Y = \frac{3X + 2}{4X - 1}}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$\boldsymbol{f^{-1}(X)(3X + 24X - 1}$$

Comprobando resultados por ejemplo para $X = 1$

$$f(X) = \frac{X + 2}{4X - 3}$$

$$f(1) = \frac{1 + 2}{4 - 3}$$

$$f(1) = \frac{3}{1} = 3$$

$$f^{-1}(X) = \frac{3X + 2}{4X - 1}$$

$$f^{-1}(3) = \frac{3(3) + 2}{4(3) - 1}$$

$$f^{-1}(3) = \frac{9 + 2}{12 - 1} = \frac{11}{11} = 1$$

$$\boldsymbol{f^{-1}(3) = 1}$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{Sif(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a}$$

(4.54) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$$\boldsymbol{f(X) = \sqrt[3]{X+2}}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \sqrt[3]{X+2}$$

$$Y^3 = (\sqrt[3]{X+2})^3$$

$$Y^3 = X + 2$$

$$X = Y^3 - 2$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$\boldsymbol{Y = x^3 - 2}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$\boldsymbol{f^{-1}(X) = X^3 - 2}$$

Comprobando resultados por ejemplo para $X = 6$

$$f(X) = \sqrt[3]{X+2}$$

$$f(6) = \sqrt[3]{(6)+2}$$

$$f(6) = \sqrt[3]{8}$$

$$f(6) = 2$$

$$f{-}1(X) = x^3 - 2$$

$$f{-}1(X) = (2)^3 - 2$$

$$f{-}1(X) = 8 - 2 = 6$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{Si\ f(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a}$$

(4.55) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$\boldsymbol{f(X) = X^2 + 2}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = X^2 + 2$$

$$X = \sqrt{Y - 2}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \sqrt{X - 2}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = \sqrt{X - 2}$$

Comprobando resultados para $X \geq 2$ por ejemplo para $X = 3$

$$f(X) = X^2 + 2$$

$$f(3) = (3)^2 + 2$$

$$f(3) = 9 + 2$$

$$f(3) = 11$$

$$f^{-1}(X) = \sqrt{X - 2}$$

$$f^{-1}(11) = \sqrt{(11) - 2}$$

$$f^{-1}(11) = \sqrt{9}$$

$$f^{-1}(11) = 3$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{Si\ f(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a}$$

Graficando se tiene:

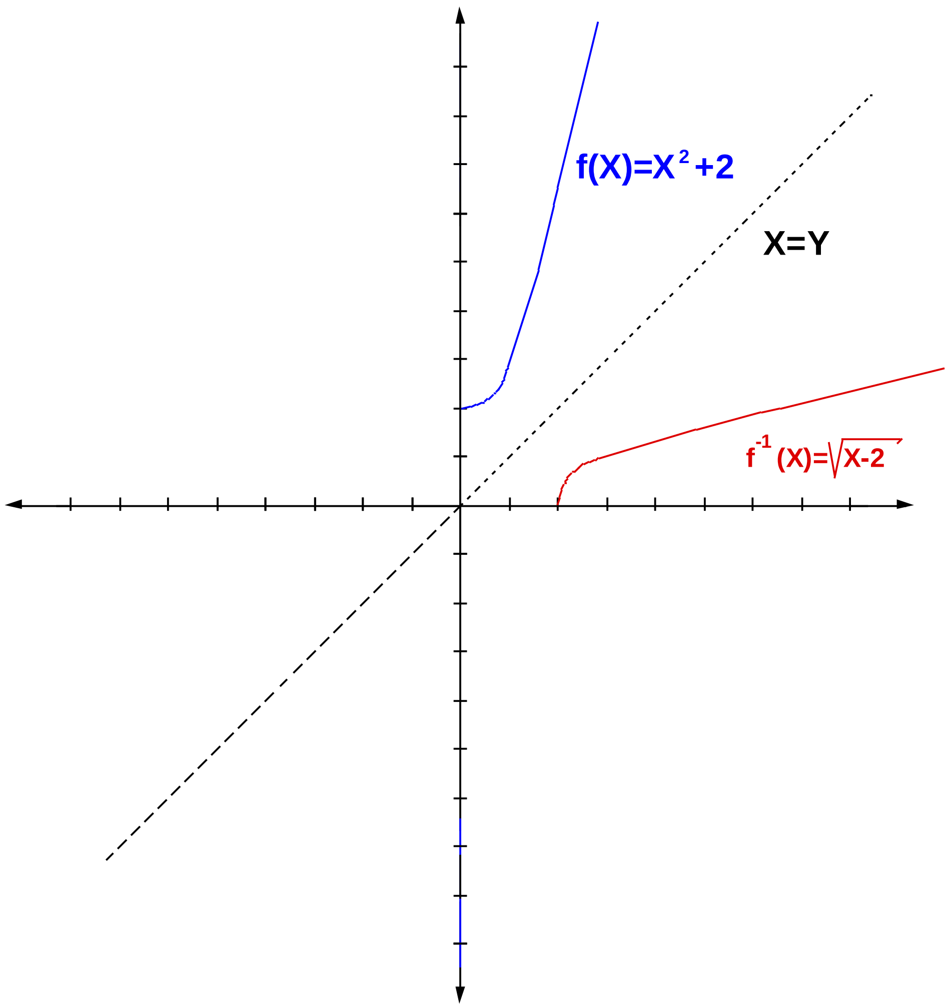


Figura 4.134

(4.56) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$$\boldsymbol{f(X) = 2^{X-2}}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = 2^{x-2}$$

$$logY = log2^{X-2}$$

$$logY = (X-2)log2$$

$$logY = Xlog2 - 2log2$$

$$Xlog2 = logY + 2log2$$

$$X = \frac{logY + 2log2}{log2}$$

$$X = \frac{logY}{log2} + \frac{2log2}{log2}$$

$$X = \frac{logY}{log2} + 2$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \frac{logX}{log2} + 2$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$\boldsymbol{f^{-1}(X) = \frac{logX}{log2} + 2}$$

Comprobando resultados por ejemplo para X=4

$$f(X) = 2^{X-2}$$

$$f(4) = 2^{4-2}$$

$$f(4) = 2^2$$

$$f(4) = 4$$

$$f^{-1}(X) = \frac{logX}{log2} + 2$$

$$f^{-1}(4) = \frac{log4}{log2} + 2$$

$$f^{-1}(4) = 2 + 2$$

$$f^{-1}(4) = 4, \ Se \ verifica \ que :$$

$$Si \ f(a) = b, \ entonces \ f^{-1}(b) = a$$

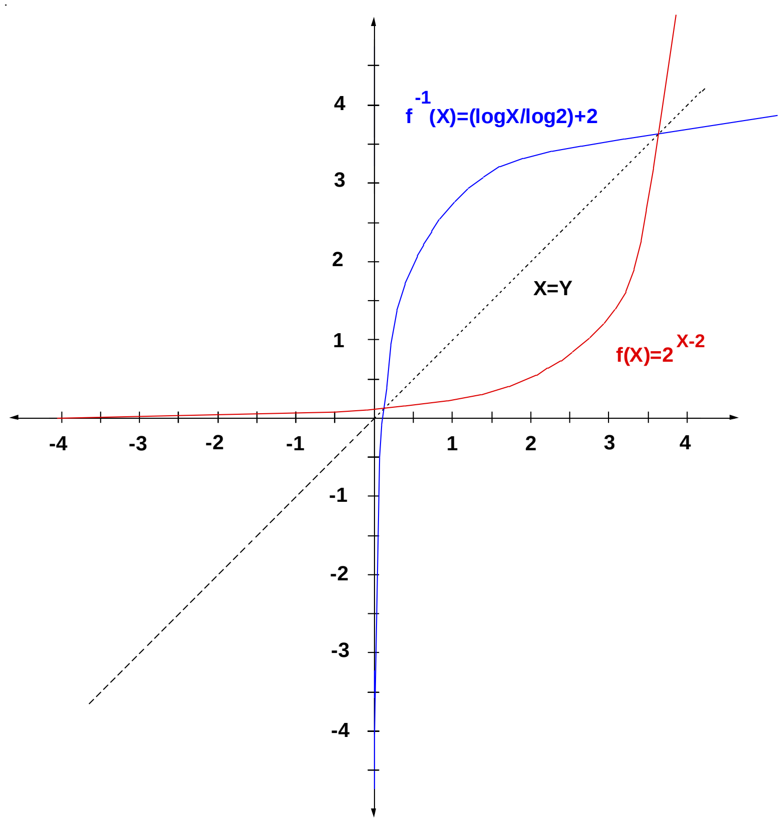


Figura 4.135

(4.57) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$\boldsymbol{f(X) = ln\sqrt{X-3}}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = ln\sqrt{X-3}$$

$$e^Y = e^{ln\sqrt{X-3}}$$

$$e^Y = \sqrt{X-3}$$

$$(e^Y)^2 = X-3$$

$$e^{2Y} = X-3$$

$$X = e^{2Y}+3$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$\boldsymbol{X = e^{2Y}+3}$$

$$Y = e^{2X}+3$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$\boldsymbol{f^{-1}(X) = e^{2X}+3}$$

Comprobando resultados para $X \geq 3$ por ejemplo para $X = 4$

$$f(X) = ln\sqrt{X-3}$$

$$f(4) = ln\sqrt{4-3}$$

$$f(4) = ln\sqrt{1}$$

$$f(4) = 0$$

$$\boldsymbol{f^{-1}(X) = e^{2X}+3}$$

$$f^{-1}(0) = e^{2(0)} + 3$$

$$f^{-1}(0) = e^{2(0)} + 3$$

$$f^{-1}(0) = e^{0} + 3$$

$$f^{-1}(0) = e^{0} + 3$$

$$f^{-1}(0) = 1 + 3$$

$$f^{-1}(0) = 4$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{Si\ f(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a}$$

Graficando se tiene:

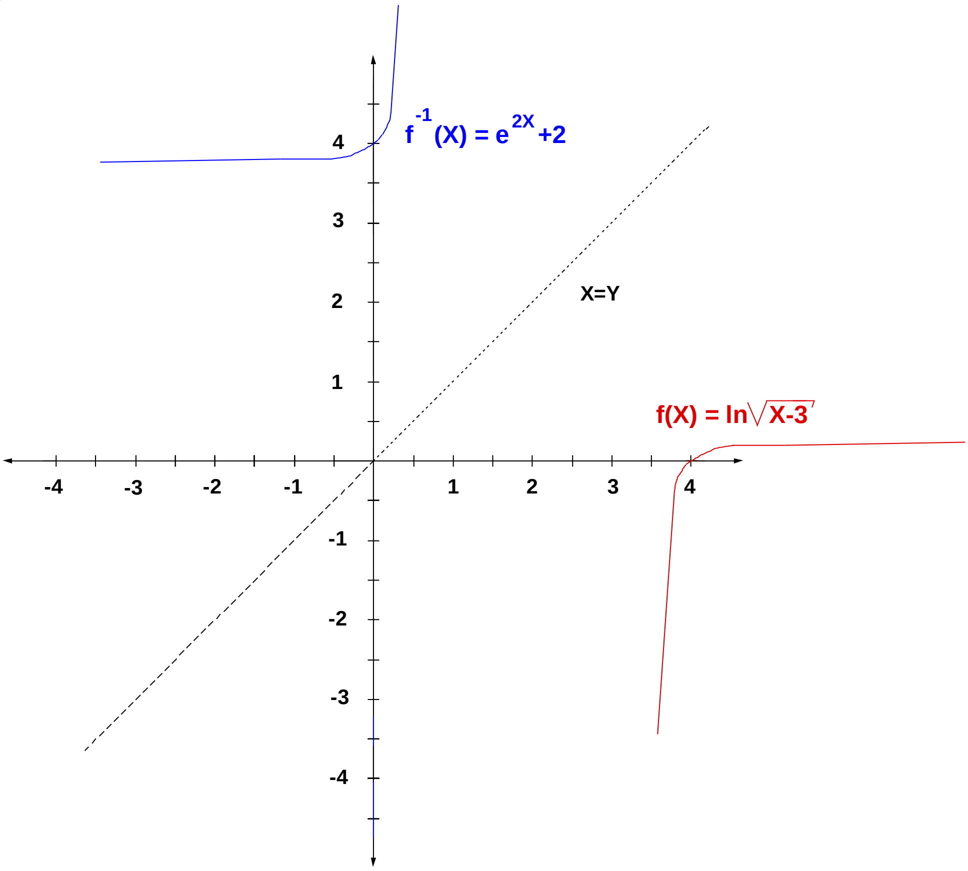


Figura 4.136

(4.58) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$\boldsymbol{f(X) = sen5X}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = sen5X$$

$$arc\ sen(Y) = sen5X$$

$$X = \frac{arc\ senY}{5}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$X = \frac{arc\ senY}{5}$$

$$Y = \frac{arc\ senX}{5}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = \frac{arc\ senX}{5}$$

Comprobando resultados por ejemplo para $X = 1$

$$f(X) = sen5X$$

$$f(1) = sen5(1)$$

$$f(1) = sen5$$

$$f(1) = 0{,}0871$$

$$f^{-1}(X) = \frac{arc\ senX}{5}$$

$$f^{-1}(0{,}0871) = \frac{arc\ sen\ (0{,}087)1}{5}$$

$$f^{-1}(0{,}0871) = \frac{1}{1}$$

$$f^{-1}(0{,}0871) = 1$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{Si\ f(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a}$$

(4.59) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$$\boldsymbol{f(X) = \sqrt[3]{4X - 3}}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \sqrt[3]{X - 3}$$

$$Y^3 = (\sqrt[3]{X - 3})^3$$

$$Y^3 = 4X - 3$$

$$X = Y^3 + \frac{3}{4}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$\boldsymbol{Y = \frac{X^3 + 3}{4}}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$\boldsymbol{f^{-1}(X) = \frac{X^3 + 3}{4}}$$

Comprobando resultados por ejemplo para $X = 1$

$$f(X) = \sqrt[3]{4X - 3}$$

$$f(1) = \sqrt[3]{4-3}$$

$$f(1) = \sqrt[3]{1}$$

$$f(1) = 1$$

$$\boldsymbol{f^{-1}(X) = \frac{X^3+3}{4}}$$

$$f^{-1}(X) = \frac{1^3+3}{4}$$

$$f^{-1}(X) = \frac{4}{4} = 1$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{Si\ f(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a}$$

Graficando se tiene:

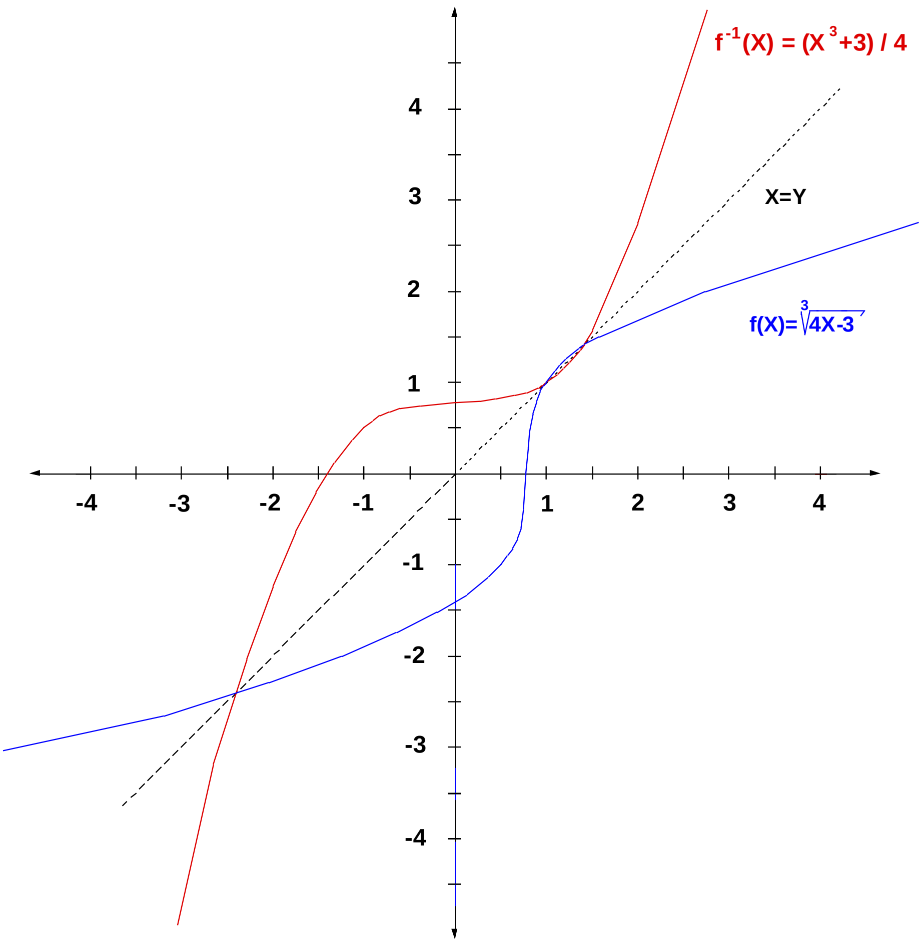


Figura 4.137

(4.60)	Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$$\boldsymbol{f(X) = arc\ cos(X-6)}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = arc\ cos(X-6)$$

$$cos\ Y = X-6$$

$$\boldsymbol{X = cos\ Y + 6}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$\boldsymbol{Y = cos\ X + 6}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$\boldsymbol{f^{-1} = cos\ X + 6}$$

Comprobando resultados por ejemplo para $X = 6$

$$f(X) = arc\ cos(X - 6)$$

$$f(6) = arc\ cos(6 - 6)$$

$$f(6) = arc\ cos(0)$$

$$f(6) = 90°$$

$$f^{-1}(X) = cosX + 6$$

$$f^{-1}(90°) = cos90° + 6$$

$$f^{-1}(90°) = 0 + 6$$

$$f^{-1}(90°) = 6$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{Si\ f(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a}$$

(4.61) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$$\boldsymbol{f(X) = |X + 4|}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$|X+4| = \begin{cases} X+4 & si \quad X+4 \geq 0 \\ -(X+4) & si \quad X+4 < 0 \end{cases}$$

Por lo que la función será:

$$|X+4| = \begin{cases} X+4 & si \quad X+4 \geq 0 \\ -X-4 & si \quad X+4 < 0 \end{cases}$$

Entonces se tendrá:

$$f(X) = \begin{cases} X+4 \\ -X-4 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} Y = X+4 \\ Y = -X-4 \end{cases}$$

b. Se despeja la variable independiente X

$$\begin{cases} X = Y-4 \\ X = -Y-4 \end{cases}$$

c. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$\begin{cases} Y = X-4 \\ Y = -X-4 \end{cases}$$

d. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original

$$f^{-1}(X) = \begin{cases} X-4 & si \quad X \geq -4 \\ -X-4 & si \quad X < -4 \end{cases}$$

(4.62) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$$\boldsymbol{f(X) = |X^2 - 16|}$$

a. Aplicando la definición de tiene:

$$|X^2 - 16| = \begin{cases} X^2 - 16 & si \quad X^2 - 16 \geq 0 \\ -(X^2 - 16) & si \quad X^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

Análisis de condicionantes:

$$a. \; X^2 - 16 \geq 0$$

$$X^2 \geq 16$$

Resolviendo

$$X \geq 4 \quad y \quad X \leq -4$$

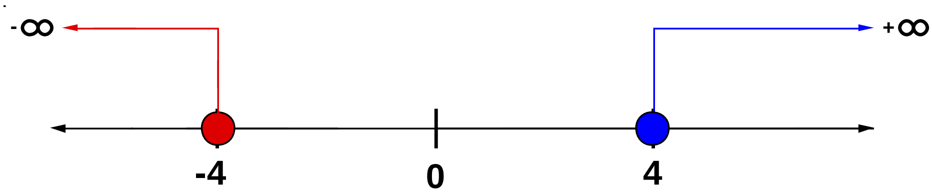


Figura 4.138

$$b. \; X^2 - 16 < 0$$

$$X^2 < 16$$

Resolviendo

$$X < 4 \quad y \quad X > -4$$

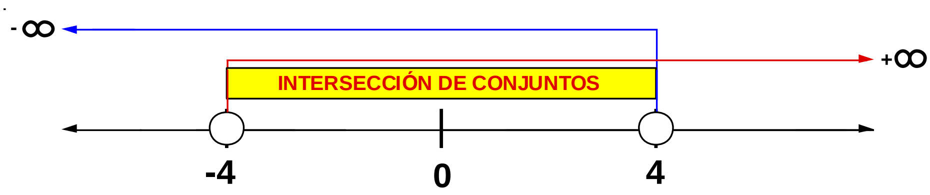


Figura 4.139

Función definida:

$$|X^2 - 16| = \begin{cases} X^2 - 16 & si \quad X \geq 4 \quad y \quad X \leq -4 \\ -X^2 + 16 & si \quad (-4 < X < 4) \end{cases}$$

Entonces se tendrá:

$$f(X) = \begin{cases} X^2 - 16 \\ -X^2 + 16 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} Y = X^2 - 16 \\ Y = -X^2 + 16 \end{cases}$$

b. Se despeja la variable independiente X.

$$\begin{cases} X = \sqrt{Y + 16} \\ X = \sqrt{16 - Y} \end{cases}$$

c. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$\begin{cases} Y = \sqrt{X + 16} \\ Y = \sqrt{16 - X} \end{cases}$$

d. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = \begin{cases} \sqrt{X + 16} & si \quad X \geq 4 \quad y \quad X \leq -4 \\ \sqrt{16 - X} & si \quad (-4 < X < 4) \end{cases}$$

(4.63) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{3X - 2}{2X + 7}}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \frac{3X-2}{2X+7}$$

$$Y(2X+7) = 3X-2$$

$$2XY+7Y = 3X-2$$

$$2XY-3X = -7Y-2$$

$$X(2Y-3) = -7Y-2$$

$$X = (-7Y-2)/(2Y-3)$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = -7X-22X-3$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = -7X-22X-3$$

Comprobando resultados por ejemplo para $X = 2$

$$f(X) = \frac{3X-2}{2X+7}$$

$$f(2) = \frac{3(2)-2}{2(2)+7}$$

$$f(2) = \frac{6-2}{4+7}$$

$$f(2) = \frac{4}{11}$$

$$f^{-1}(X) = \frac{-7X-2}{2X-3}$$

$$f^{-1}(\frac{4}{11}) = \frac{-7(\frac{4}{11})-2}{2(\frac{4}{11})-3}$$

$$f^{-1}(\frac{4}{11}) = \frac{\frac{-28}{11} - 2}{(\frac{8}{11}) - 3}$$

$$f^{-1}(\frac{4}{11}) = \frac{\frac{-28-22}{11}}{\frac{8-33}{11}}$$

$$f^{-1}(\frac{4}{11}) = \frac{\frac{-50}{11}}{\frac{-25}{11}}$$

$$f^{-1}(\frac{4}{11}) = \frac{50}{11}$$

$$f^{-1}(\frac{4}{11}) = 2$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{Si\ f(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a}$$

(4.64) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ para

$$\boldsymbol{f(X) = \sqrt{\frac{X-2}{X+2}}}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \sqrt{\frac{X-2}{X+2}}$$

$$Y^2 = \sqrt{\frac{X-2}{X+2}}^2$$

$$Y^2 = \frac{X-2}{X+2}$$

$$Y^2(X+2) = X-2$$

$$XY^2 + 2Y^2 = X-2$$

$$XY^2 - X = -2Y^2 - 2$$

$$-XY^2 + X = 2Y^2 + 2$$

$$X(-Y^2 + 1) = 2Y^2 + 2$$

$$X = \frac{2Y^2 + 2}{1 - Y^2}$$

$$X = \frac{2(Y^2 + 1)}{1 - Y^2}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \frac{2(X^2 + 1)}{1 - X^2}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = \frac{2(X^2 + 1)}{1 - X^2}$$

(4.65) Dadas las funciones $f(X) = \frac{X-3}{4}$ y $g(X) = 10X + a$ calcular el valor de a para que se cumpla la siguiente igualdad $f^{-1}(-2) = g^{-1}(0)$

$\boldsymbol{f(X) = \frac{X-3}{4}}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \frac{X - 3}{4}$$

$$4Y = X - 3$$

$$X = 4Y + 3$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = 4X + 3$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = 4X + 3$$

$\boldsymbol{g(X) = 10X + a}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = 10X + a$$

$$X = \frac{Y - a}{10}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \frac{X - a}{10}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$g^{-1}(X) = \frac{X - a}{10}$$

$\boldsymbol{f^{-1}(-2) = 4X + 3}$

$$f^{-1}(-2) = 4(-2) + 3$$

$$f^{-1}(-2) = -8 + 3$$

$$f^{-1}(-2) = -5$$

$\boldsymbol{g^{-1}(0) = \frac{X - a}{10}}$

$$g^{-1}(0) = \frac{(0) - a}{10}$$

$$g^{-1}(0) = \frac{-a}{10}$$

$$\boldsymbol{f^{-1}(-2) = g^{-1}(0)}$$

$$-5 = \frac{-a}{10}$$

$$-5(10) = -a$$

$$5(10) = a$$

$$a = 50$$

(4.66) Dadas las funciones $f(X) = \frac{2X-1}{2}$ y $g(X) = \frac{X-a}{4}$ calcular el valor de a para que se cumpla la siguiente igualdad $f^{-1}(2) = g^{-1}(1)$

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{2X-1}{2}}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \frac{2X-1}{2}$$

$$2Y = 2X - 1$$

$$X = \frac{2Y+1}{2}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \frac{2X+1}{2}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1} = \frac{2X+1}{2}$$

$$\boldsymbol{g(X) = \frac{X-a}{4}}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \frac{X - a}{4}$$

$$X = 4Y + a$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = 4X + a$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$g^{-1}(X) = 4X + a$$

$\boldsymbol{f^{-1}(2) = \frac{2X+1}{2}}$

$$f^{-1}(2) = \frac{2(2)+1}{2}$$

$$f^{-1}(2) = \frac{4+1}{2}$$

$$f^{-1}(2) = \frac{5}{2}$$

$\boldsymbol{g^{-1}(1) = 4X + a}$

$$g^{-1}(1) = 4(1) + a$$

$$g^{-1}(1) = 4 + a$$

$\boldsymbol{f^{-1}(2) = g^{-1}(1)}$

$$\frac{5}{2} = 4 + a$$

$$a = \frac{5}{2} - 4$$

$$a = \frac{5-8}{2}$$

$$a = \frac{-3}{2}$$

(4.67) Dadas las funciones $f(X) = 10X - 2$ y $g(X) = 5X + 1$ calcular el valor de a para que se cumpla la siguiente igualdad $f^{-1}(X) = g^{-1}(2)$

$\boldsymbol{f(X) = 10X - 2}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = 10X - 2$$

$$Y + 2 = 10X$$

$$X = \frac{Y + 2}{10}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \frac{X + 2}{10}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = \frac{X + 2}{10}$$

$\boldsymbol{g(X) = 5X + 1}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = 5X + 1$$

$$X = \frac{Y - 1}{5}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \frac{X-1}{5}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$g^{-1}(X) = \frac{X-1}{5}$$

$\boldsymbol{f^{-1}(X) = g^{-1}(2)}$

$\boldsymbol{g^{-1}(2) = \frac{X-1}{5}}$

$$g^{-1}(2) = \frac{X-1}{5}$$

$$g^{-1}(2) = \frac{(2)-1}{5}$$

$$g^{-1}(2) = \frac{1}{5}$$

$$f^{-1}(X) = g^{-1}(2)$$

$$\frac{X+2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$5(X+2) = 10$$

$$5X + 10 = 10$$

$$X = 0$$

(4.68) Dadas las funciones $f(X) = X^2 - 16$ y $g(X) = X + 4$ calcular el valor de a para que se cumpla la siguiente igualdad $f^{-1}(9) = g^{-1}(X)$

$\boldsymbol{f(X) = X^2 - 16}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = X^2 - 16$$

$$X = \sqrt{Y + 16}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \sqrt{X + 16}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = \sqrt{X + 16}$$

$\boldsymbol{g(X) = X + 4}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = X + 4$$

$$X = Y - 4$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = X - 4$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$g^{-1}(X) = X - 4$$

$\boldsymbol{f^{-1}(9) = g^{-1}(X)}$

$\boldsymbol{f^{-1}(9) = \sqrt{X + 16}}$

$$f^{-1}(9) = \sqrt{X + 16}$$

$$f^{-1}(9) = \sqrt{9 + 16}$$

$$f^{-1}(9) = \sqrt{25}$$

$$f^{-1}(9) = 5 \quad y \quad -5$$

$$f^{-1}(9) = g^{-1}(X)$$

$$5 = X - 4$$

$$X = 9$$

$$f^{-1}(9) = g^{-1}(X)$$

$$-5 = X - 4$$

$$X = -1$$

(4.69) Demostrar que la función recíproca de la función de proporcionalidad $f(X) = \frac{k}{X}$ es la misma función.

$\boldsymbol{f(X) = \frac{k}{X}}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \frac{k}{X}$$

$$X = \frac{k}{Y}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \frac{k}{X}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = \frac{k}{X}$$

Por lo tanto:

$$f(X) = f^{-1}(X)$$

(4.70) Determinar la función inversa de una función que a cada número real le asigna la cuarta parte del triplo de su cuadrado

$\boldsymbol{f(X) = \frac{3X^2}{4}}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \frac{3X^2}{4}$$

$$X = \sqrt{\frac{4Y}{3}}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \sqrt{\frac{4X}{3}}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = \sqrt{\frac{4X}{3}}$$

(4.71) Dada la función $f(X)$, calcular la función inversa $f^{-1}(X)$ y determinar su dominio para:

$\boldsymbol{f(X) = \frac{5X - 3}{4X + 5}}$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \frac{5X-3}{4X+5}$$

$$Y(4X+5) = 5X-3$$

$$4XY + 5Y = 5X - 3$$

$$4XY - 5X = -5Y - 3$$

$$X(4Y-5) = -5Y - 3$$

$$X = \frac{-5Y-3}{4Y-5}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \frac{-5X-3}{4X-5}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1}(X) = \frac{-5X-3}{4X-5}$$

Comprobando resultados por ejemplo para $X = 1$

$$f(X) = \frac{5X-3}{4X+5}$$

$$f(1) = \frac{5(1)-3}{4(1)+5}$$

$$f(1) = \frac{5-3}{4+5}$$

$$f(1) = \frac{2}{9}$$

$$f^{-1}(X) = \frac{-5X-3}{4X-5}$$

$$f^{-1}(\frac{2}{9}) = \frac{-5(\frac{2}{9}) - 3}{4(\frac{2}{9}) - 5}$$

$$f^{-1}(\frac{2}{9}) = \frac{\frac{-10}{9} - 3}{\frac{8}{9} - 5}$$

$$f^{-1}(\frac{2}{9}) = \frac{\frac{-10 - 27}{9}}{\frac{8 - 45}{9}}$$

$$f^{-1}(\frac{2}{9}) = \frac{\frac{-37}{9}}{\frac{-37}{9}}$$

$$f^{-1}(\frac{2}{9}) = \frac{-37}{-37}$$

$$f^{-1}(\frac{2}{9}) = 1$$

Se verifica que:

$$Si\ f(a) = b,\ entonces\ f^{-1}(b) = a$$

El dominio de $f^{-1}(X)$ será:

$$f^{-1}(X) = \frac{-5X - 3}{4X - 5}$$

$$4X - 5 \neq 0$$

$$X \neq \frac{5}{4}$$

(4.72) Dada la función $f(X) = \sqrt{\frac{X+4}{X-1}}$ efectuar el campo operacional para $f(X)$ y $f^{-1}(X)$

$$\boldsymbol{f(X) = \sqrt{\frac{X+4}{X-1}}}$$

a. Se despeja la variable independiente X

$$Y = \sqrt{\frac{X+4}{X-1}}$$

$$Y^2 = \sqrt{\frac{X+4}{X-1}}^2$$

$$Y^2 = \frac{X+4}{X-1}$$

$$Y^2(X-1) = X+4$$

$$XY^2 - Y^2 = X+4$$

$$XY^2 - X = Y^2+4$$

$$X(Y^2-1) = Y^2+4$$

$$X = \frac{Y^2+4}{Y^2-1}$$

b. Se cambian las variables, independiente X por la dependiente Y y viceversa

$$Y = \frac{X^2+4}{X^2-1}$$

c. La función obtenida corresponde a la función buscada, es decir la inversa de la función original.

$$f^{-1} = \frac{X^2+4}{X^2-1}$$

d. Campo operacional

$$f(X) = \sqrt{\frac{X+4}{X-1}} \quad y \quad f^{-1} = \frac{X^2+4}{X^2-1}$$

Analizando el dominio de $f(X)$:

$$f(X) = \sqrt{\frac{X+4}{X-1}}$$

Cociente de dos expresiones de la forma $\sqrt{\frac{a}{b}}$

Restricción: el radicando $\frac{a}{b}$ no puede ser negativo, es decir, debe existir raíz real y, posibilidad de generarse una indeterminación matemática.

Análisis: $\frac{a}{b} \geq 0 \quad y \quad b \neq 0$

$$\frac{X+4}{X-1} \geq 0$$

Posibilidades generales:

Posibilidades

a) **y** $\frac{+}{+}$

o

b) **y** $\frac{-}{-}$

Analizando la posibilidad a:

$$X+4 \geq 0 \quad y \quad X-1 > 0$$

$$X \geq -4 \quad y \quad X > 1$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

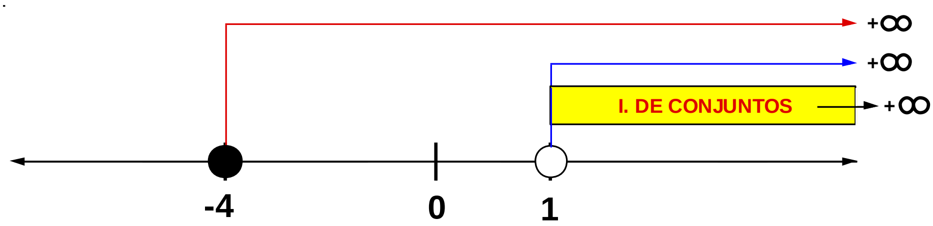


Figura 4.140

Solución a: $X > 1$

Analizando la posibilidad b:

$$X+4 \leq 0 \quad y \quad X-1 < 0$$

$$X \leq -4 \quad y \quad X < 1$$

Nótese que, en la expresión del denominador no se considera la igualdad a cero, puesto que debe evitarse la indeterminación matemática, por lo tanto:

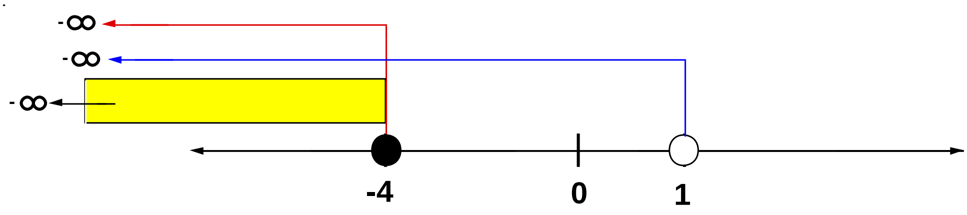


Figura 4.141

Solución b: $X \leq -4$
De esta manera la solución final será:

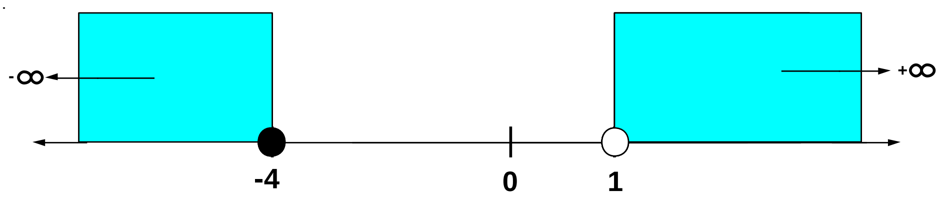


Figura 4.142

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df(X) = \{X/X > 1 \ o \ X \leq -4\}$$

Analizando el dominio de $f^{-1}(X)$:

$$f^{-1}(X) = \frac{X^2 + 4}{X^2 - 1}$$

Cociente de dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$
Restricción: posibilidad de generarse una indeterminación matemática.
Análisis: $b \neq 0$

$$X^2 - 1 \neq 0$$

$$X \neq \sqrt{1}$$

$$X \neq 1 \qquad y \quad X \neq -1$$

De esta manera se tendrá:

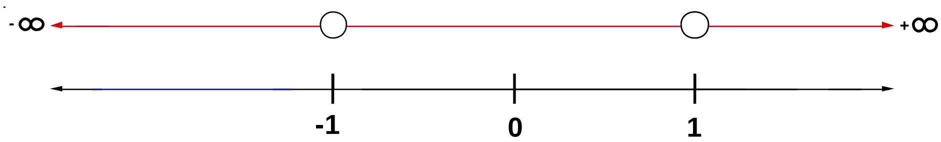


Figura 4.143

El dominio de la función queda definido como sigue:

$$Df^{-1}(X) = \{X/X \in R_2,\ excepto\ X = 1 \quad y \quad X = -1\}$$

Al generar la intersección de conjuntos correspondiente a los dominios o campos de existencia de las dos funciones se tiene:

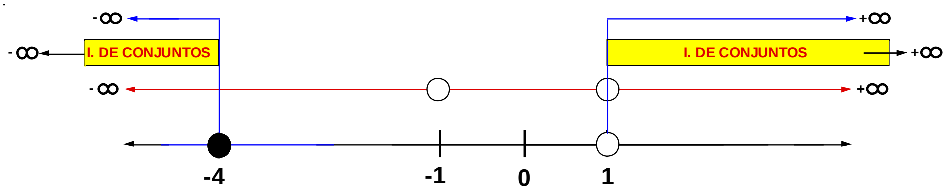


Figura 4.144

$$Df(X) \cap Df^{-1}(X) = \{X \leq -4\ y\ X > 1\}$$

De lo antes expuesto se desprende:

$$f(X)+f(-1(X) = f(X)-f^{-1}(X) = f(X)\times f^{-1}(X) = \{X \leq -4 \quad y \quad X > 1\}$$

En lo referente al cociente, se deberán excluir del dominio común aquellos valores reales para los cuales $f^{-1}(X) = 0$, entonces:
$f^{-1}(X) = 0$ no existen valores.
Entonces se tendrá:

$$f(X)/f^{-1}(X) = \{X \leq -4\ y\ X > 1\}$$

Referencias bibliográficas

[1] E. Linés, *Principios de análisis matemático.* España: Reverté, 1991. OCLC: 61438359.

[2] J. M. Casteleiro Villalba, *Introducción al análisis matemático I: cáculo diferencial de una variable.* Madrid: ESIC Editorial, 2006. OCLC: 928639822.

[3] G. Restrepo Sierra, Universidad del Valle, and Programa Editorial, *Fundamentos de las matemáticas.* Cali: Programa Editorial Universidad del Valle, 2003. OCLC: 318382848.

[4] F. Mejía Duque, R. A. Álvarez Jiménez, and H. Fernández Castaño, *Matemáticas previas al cálculo.* Medellín, Colombia: Universidad de Medellín, 2005. OCLC: 191735048.

[5] A. Camacho, *Calculo diferencial.* España: Diaz de Santos, 2009. OCLC: 777062064.

[6] R. Jiménez, *Funciones.* México: Pearson Educación, 2006. OCLC: 893545465.

[7] J. Ruíz Basto, *Matemáticas 4: precálculo : funciones y aplicaciones : bachillerato general.* México: Patria, 2010. OCLC: 893583937.

[8] E. Steiner, *Matemáticas para las ciencias aplicadas.* Barcelona: Reverté, 2011. OCLC: 912467601.

[9] J. M. Becerra Espinosa, *Matemáticas V: – el placer de dominarlas sin complicaciones.* México, D.F.: Escuela Nacional Preparatoria, Dirección General, 2004. OCLC: 60591240.